



روشهایی از جبر

مؤلفین: جی. ای. هبورن، سی. پلامپتون



ترجمه: حمیدرضا امیری

روشهایی از جبر

مؤلفین
جُن. ای. هبورن
چارلز پلامپتون

ترجمه
حمیدرضا امیر

Hebborn, Joan. E

هبورن، جُن

روشهایی از جبر، مؤلفین جُن. ای. هبورن. چارلز پلامپتون؛ ترجمه حمیدرضا امیری. - تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. دفتر انتشارات کمک آموزشی. انتشارات مدرسه، ۱۳۷۳. ۱۳۵ ص.: جدول، نمودار. (کتابهای کوچک ریاضی: ۱).

فهرست نویسی براساس اطلاعات فیبا (فهرست نویسی پیش از انتشار).

Methods of Algebra.

این کتاب ترجمه‌ای است از:

چاپ ششم: پاییز ۱۳۷۸.

ISBN 964-436-798-7

۱. جبر - کتابهای درسی - راهنمای آموزشی (متوسطه). ۲. جبر - مسائل، تمرینها و غیره (متوسطه). الف. پلامپتون، چارلز. Plumptre, Charles. ب. امیری، حمیدرضا، ۱۳۴۲، مترجم. ج. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. دفتر انتشارات کمک آموزشی. انتشارات مدرسه. د. عنوان.

۵۱۲ ۰۰۷۶

QA ۱۵۹ ر ۲۹

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی
انتشارات مدرسه

روشهایی از جبر
این کتاب ترجمه‌ای است از
Methods of Algebra

مؤلفین: جن ای هبورن
چارلز پلامپتون

ترجمه حمیدرضا امیری
صفحه‌ارا هوتسگ اشتنای

چاپ اول ۷۳ چاپ ششم تابیر ۱۳۷۸
بیرار چاپ اول تا ششم ۳۱۰۰۰ / تراژ چاپ ششم ۳۰۰۰ نسخه
حق چاپ محفوظ است

تهران، حسان سهند قری، بل کریمخان ردا.
کوچه سهند محمود حقیق طلب، یلاک ۳۶
تلفن ۸۸۰۰۳۲۴۹

دورنویس (فاکس) ۸۹۰۳۸۰۹، ۸۸۲۰۵۹۹
لینوگرافی، چاپ و صحافی از چاپخانه مدرسه
شابک ۹۶۴-۴۳۶-۷۹۸-۷

ISBN-964-436-798-7

فهرست مطالب

۷	مقدمه مؤلفین
۹	مقدمه مترجم
۱۱	۱. توابع جبری
۱۱	توابع، توابع مرکب و توابع معکوس
۱۷	نماها، اعداد گنگ و لگاریتمها
۲۵	توابع لگاریتمی و نمایی
۲۶	رابطه‌های خطی
۳۳	۲. چند جمله‌ایها و توابع گویا
۳۳	چکناچمله‌ایها، قضیه باقی‌مانده و قضیه فاکتور
۴۳	توابع گویا و کسرهای جزئی
۵۱	۳. توابع درجه دوم و معادلات درجه دوم
۵۱	توابع درجه دوم
۵۴	معادلات درجه دوم
۶۷	۴. اثبات ریاضی
۶۷	بعضی از مفاهیم منطقی
۷۰	اثبات با استفاده از تناقض
۷۱	کاربرد مثال نقض
۷۱	اثبات با استفاده از استنتاج
۷۲	اثبات با استفاده از اشیاع
۷۳	اثبات با استفاده از استقرای ریاضی
۷۹	اثبات نتایج متعارف با استفاده از استقرا

۸۳	۵. دنباله‌ها و سریها
۸۳	دنباله‌ها
۸۴	سریها
۸۷	تصاددهای عددی (APS)
۸۹	سری عددی
۹۱	تصاددهای هندسی (GPS)
۹۳	سری هندسی
۹۵	حاصل جمع یک سری هندسی نامتناهی
۹۷	سری دو جمله‌ای
۱۰۳	چندسری متناهی دیگر

۱۰۹	۶. نابرابریها
۱۰۹	نابرابریهای خطی
۱۱۲	نابرابریهای درجه دوم
۱۱۶	نابرابریهای شامل قدرمطلق
۱۱۹	نابرابریهای یک متغیره در حالت کلیتر
۱۲۴	نابرابریهای دو متغیره
۱۲۹	جوابها

مقدمه مؤلفین

به دنبال انقلاب اوایل دهه ۱۹۶۰، که منجر به دو دستگی ناخوشایندی بین ریاضیات «جدید» و «سنتی» شد، مواد درسی ریاضیات پیشرفته باردیگر دستخوش تغییراتی در محتوی و روش گردیده است.

اکنون، تمایل جاری در سطح پیشرفته ریاضیات، که توسط بسیاری از دایره‌های امتحانات مطرح شده است، در کوشش برای ایجاد هدف امتحانهای واقعی که همان به حداقل رساندن تعلیم و به حداکثر نشان دادن امتحان است، به سوی رهیافتی تکامل یافته در حرکت است. علاوه بر این، نتیجه حاصل از تعدادی از مواد اولیه و هسته‌ای، در سطح ریاضیات پیشرفته شامل روشهایی از ریاضیات محض، گسترش یافته است. این روشها در سطح تعلیم دبیرستانی اعمال می‌شوند.

مفهوم هسته‌ای را می‌توان در راههای گوناگون به کار برد، که یکی از آنها را در فوق ذکر کردیم. به مفهوم هسته‌ای می‌توان، حق‌گزینشهایی، چون مکانیک نظری، ریاضیات محض و آمار را اضافه کرد.

این سری کتابهای هسته‌ای شامل کاربردهای متفاوت از ایده هسته‌ای مورد نظر است. اینها کتابهایی راجع به بردی از موضوعها هستند، که هریک از آنها در مطالعه ریاضیات سطح پیشرفته اساسی است، و همراه باهم زمینه‌های اصلی هر بخش ریاضی را در سطح پیشرفته می‌پوشانند.

به‌خصوص، در زمانهایی که شرایط اقتصادی مشکلات به‌دست آوردن کتابهای درسی جامعه در بردارنده مطالب کامل را حاد می‌کند، مدارس و دانشکده‌ها و دانش‌آموزان می‌توانند از کتابهای هسته‌ای به هر اندازه، که برای تکمیل کتابهایی که از پیش داشته‌اند لازم باشد، جمع‌آوری کنند، به این ترتیب، اغلب مواد امتحانی دوران اخیر، و فی‌المثل دانشگاهی، کنکوری و دبیرستانی را می‌توان با حداقل هزینه به‌دست آورد.

به طریق دیگر، کل مجموعه کتابهای هسته‌ای مورد بحث، تمام مطالب موضوعی خاص از مواد ریاضیات سطح پیشرفته را به‌دست می‌دهد.

هدف هریک از این کتابها گسترش مطلب اصلی مواد تک موضوعی مربوطه، با مثالهای حل شده و تمرینهای فراوان حاصل از تجربه وسیع امتحانی مؤلفین در این سطح، است. به این ترتیب، کتابهای هسته‌ای مورد بحث، علاوه بر مناسب بودن برای استفاده در موارد فوق، برای تکمیل کتابهای درسی جامع، با به دست دادن مثالها و تمرینهای بیشتر، ایده‌آل‌اند، و بنابراین برای آمادگی و مرور مطالب امتحانی ضرورت دارند. توانایی انجام دقیق و سریع عملیات اصلی جبری برای ریاضیات سطح پیشرفته ضروری و کلید توفیق بسیاری از جنبه‌های دیگر ریاضی است. اما، در این کتاب خاص، روشهای جبری لازم برای مواد هسته‌ای ریاضیات محض که امروزه در امتحانات کنکور به کار می‌روند، آورده شده‌اند. مثالهای حل شده بسیاری که توضیح دهنده روشهای گوناگون به کار رفته می‌باشند بخش اساسی کتاب را تشکیل می‌دهند، و هدفشان اطمینان دادن در این مورد است که دانش‌آموز هوشیار مهارت فرایندهای عملیاتی شامل توابع (جبری و متعالی)، اندیسها، اعداد اصم، چند جمله‌ایها، معادله‌ها و تابعهای درجه دوم، دنباله‌ها و سریها و نامساویها را به دست آورد. علاوه بر این، فصل مربوط به اثبات ریاضی شامل انواع مختلف اثباتهای ریاضی‌ای که دانستشان در این سطح لازم می‌نماید و توضیحات جبری بسیار است. مثالها و تمرینهای سراسر کتاب نشان‌دهنده مسائلی هستند که در دوره‌های امتحانهای ریاضیات سطح پیشرفته به کار گرفته می‌شوند.

جَن. ای. هورن
چارلز پلامتون

کتاب حاضر اولین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی است که انتشارات مدرسه تصمیم دارد - به خواست خدا - آنها را چاپ و در دسترس دانش آموزان عزیز قرار دهد.

هدف این سری کتابها طرح دقیق و اساسی موضوعات مهم ریاضیات دبیرستانی و برطرف کردن احتمالات کمبودهای موجود در مباحث مختلف ریاضیات دبیرستانی است که در هر کتاب و به نسبت حجم مباحث، یک یا چند مبحث به طور مبسوط شرح و توضیح داده می شود و مثالها و مسائل لازم در لابه لای مطالب خواهد آمد. بیشتر این کتابها که مخاطبین آنها دانش آموزان دبیرستانی می باشند تألیف است، البته ممکن است یک یا چند مورد آنها ترجمه نیز باشند که در این صورت سعی شده تا با نظام آموزشی ما منطبق باشند.

کتاب حاضر - روشهایی از جبر - همان طور که در مقدمه مؤلفین آمده، از یک سری کتابهای هسته ای - کتابهای کوچک ریاضی - انتخاب شده و شامل شش فصل است که فصلهای اول، دوم، سوم، پنجم و ششم آن فصولی هستند که در کتب ریاضیات ۱، ۲، ۳ و ۴ نظام جدید - نظام واحدی - مطرح شده و فصل چهارم آن منطبق با فصل اول کتاب «جبر و احتمال» نظام جدید آموزش و پرورش - سوم ریاضی - بوده و نیز همه فصلهای آن با کتابهای نظام آموزش متوسطه جاری نیز هماهنگ است و قابل استفاده دانش آموزان می باشد.

در این کتاب موضوعهای اساسی و مهم از طریق حل مسأله و مثال مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار گرفته و مؤلفین در القای مفاهیم - از این طریق - بسیار موفق بوده اند.

در این جا لازم می دانم از همه عزیزان به خصوص آقای غلامرضا یاسی پور که در ترجمه این کتاب اینجانب را یاری کردند، سپاسگزاری کنم.

خواهشمند است خوانندگان محترم ما را از نظرات، انتقادات و پیشنهادات خود بهره مند سازند تا در چاپ بعدی کتاب - به خواست خدا - مورد استفاده قرار گیرد.

توابع جبری^۱

۱.۱ توابع، توابع مرکب و توابع معکوس

تابع نگاشتی است که به هر عضو مجموعه‌ای مانند A ، عضو منحصر به فردی از مجموعه دیگری چون B را مربوط می‌سازد. مجموعه A را دامنه تابع و مجموعه B را هم‌دامنه تابع می‌نامیم. هر عضو هم‌دامنه لزوماً نیازی به یک عضو متناظر در دامنه ندارد، اما هر عضو دامنه باید با عضوی در «هم‌دامنه» متناظر باشد. اعضای از مجموعه B که تصاویر اعضای دامنه باشند بُرد (یا مجموعه بُرد) تابع نامیده می‌شوند.

در این جا تنها توابعی را در نظر می‌گیریم که متغیر حقیقی x را به متغیر حقیقی y تصویر کنند، یعنی:

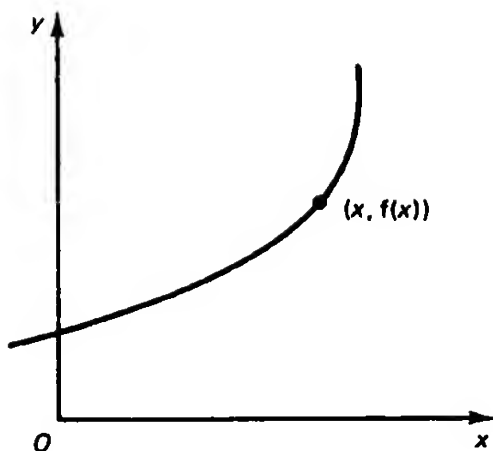
$$f: x \rightarrow y = f(x)$$

معمولاً x را متغیر آزاد و y را متغیر وابسته می‌نامیم. به طریق نموداری دو روش مهم برای نمایش تابع f از \mathbb{R} به \mathbb{R} وجود دارد.

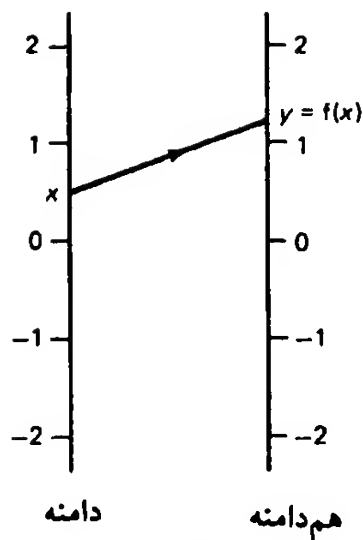
روش اول: دامنه و هم‌دامنه به صورت دو محور موازی عددهای حقیقی همراه با پیکانی از x به سمت تصویرش، $y = f(x)$ نمایش داده می‌شود (شکل ۱.۱ را ملاحظه کنید).

روش دوم: هر عضو x از دامنه و تصویر آن عضو، یعنی $f(x)$ ، زوج مرتب $[x, f(x)]$ را

(۱) تابع با ضابطه $f(x) = y$ را یک تابع جبری می‌نامند. هرگاه x و y در رابطه‌ای به صورت $F(x, y) = 0$ صدق کنند که در آن $F(x, y)$ یک چندجمله‌ای بر حسب x و y است.



شکل ۱.۲



شکل ۱.۱

تشکیل می دهند. این زوج مرتب می تواند توسط مختصات (x, y) به صورت یک نقطه در صفحه مختصات دکارتی نمایش داده شود. مجموعه همه چنین نقاطی نمودار تابع نامیده می شود و رابطه $y = f(x)$ به معادله نمودار یا منحنی آن موسوم است (شکل ۱.۲).

تابع f را تابع زوج می نامیم هرگاه:

(به ازای جميع مقادير $x^{(1)}$)

$$f(x) = f(-x)$$

تابع f را تابع فرد می نامیم هرگاه:

(به ازای جميع مقادير $x^{(1)}$)

$$f(-x) = -f(x)$$

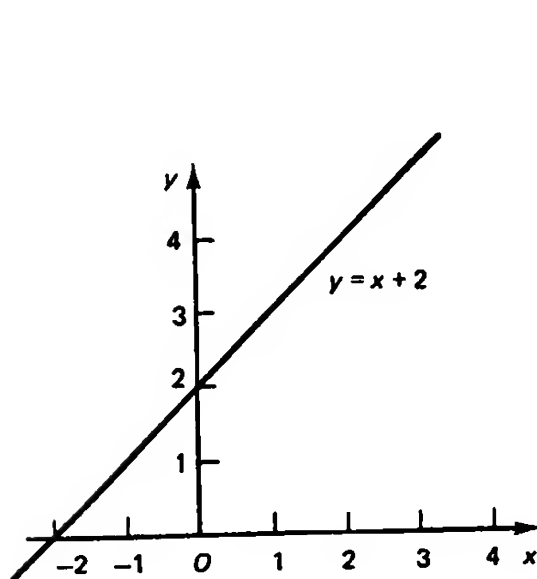
مثال ۱:

(الف) نگاشت $x \rightarrow x^{\frac{1}{2}}$ تابعی را تعریف نمی کند^(۲)، زیرا، به ازای عدد حقیقی مفروضی، مشاهده می شود که عضو منحصر به فردی متناظر با آن از مجموعه تصویر (برد تابع) وجود ندارد. (متناظر با هر مقدار حقیقی مانند x دو عضو $+\sqrt{x}$ و $-\sqrt{x}$ ، از مجموعه تصویر وجود دارد.)

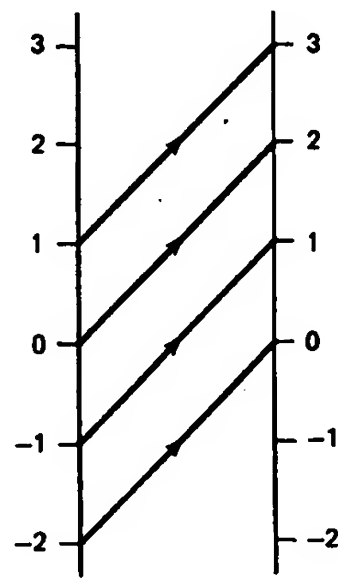
(۱) به شرطی که $x -$ در دامنه تابع باشد.

(۲) طبق قرارداد در این کتاب $x^{1/2}$ به صورت $\pm\sqrt{x}$ تعریف می شود.

(ب) نگاشت $x \rightarrow x + 2$ یک تابع است. دامنه این تابع \mathbb{R} ، مجموعه عددهای حقیقی یا زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R} است. هم‌دامنه آن نیز مجموعه عددهای حقیقی می‌باشد. این تابع می‌تواند به صورت اشکال (الف) و (ب) نمایش داده شود.



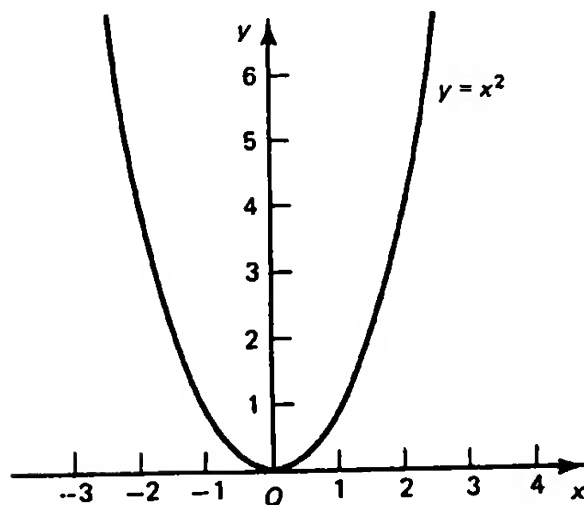
(ب)



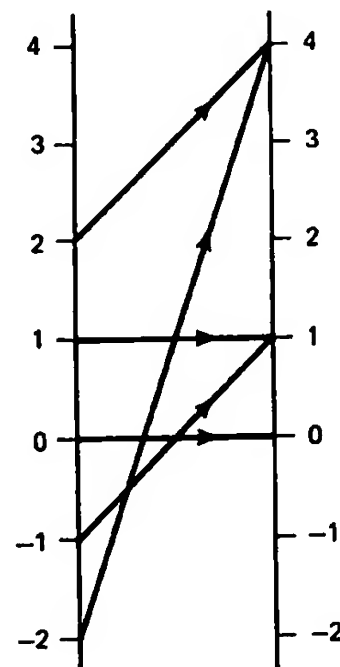
هم‌دامنه (الف) دامنه

شکل ۱.۳

(پ) نگاشت $x \rightarrow x^2$ یک تابع است. دامنه آن \mathbb{R} و هم‌دامنه آن نیز \mathbb{R} می‌باشد. بُرد



(ب)



(الف)

شکل ۱.۴

این تابع مجموعه $\{x: x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ است. این تابع را می توان توسط اشکال (الف) ۱.۴ یا (ب) ۱.۴ نمایش داد.

مثال ۲:

مشخص کنید کدام یک از توابع f ، g ، h ، که به صورت زیر تعریف شده اند، زوج یا فرد یا نه زوج و نه فرد هستند.

$$f(x) = 3x^2 \quad (\text{الف}) \quad g(x) = x - 2x^2 \quad (\text{ب}) \quad h(x) = \frac{(x-2)}{(x+2)} \quad (\text{پ})$$

$$f \text{ زوج است} \Rightarrow f(-x) = 3(-x)^2 = 3x^2 = f(x) \quad (\text{الف})$$

$$g \text{ فرد است} \Rightarrow g(-x) = (-x) - 2(-x)^2 = -x + 2x^2 = -[x - 2x^2] = -g(x) \quad (\text{ب})$$

$$h(-x) = \frac{(-x-2)}{(-x+2)} \quad (\text{ج})$$

و این ضابطه نه مساوی با $h(x)$ است و نه مساوی با $h(-x)$. بنابراین $h(x)$ نه زوج است و نه فرد.

ترکیب توابع

ترکیب توابع، تحت شرایطی معین، امکان پذیر است. این موضوع را می توان با مثالی ساده به بهترین شکل توضیح داد. فرض کنیم: $f: x \rightarrow x^2$ و $g: x \rightarrow x + 1$. در این صورت ترکیب این دو تابع که به صورت gf (به ترتیب نوشتن توجه داشته باشید) نوشته می شود به این معنی است که:

«ابتدا x به توان دو رسیده و سپس با ۱ جمع می شود» - یعنی اول f و به دنبال آن g : «ابتدا تابع f روی x اثر کرده و سپس g روی حاصل آن تأثیر می کند»

$$gf: x \rightarrow x^2 + 1$$

ترکیب این دو تابع به صورت: fg که « x و ۱ با هم جمع شده و سپس به توان دو می رسند» با gf یکی نیست.

$$fg: x \rightarrow (x+1)^2$$

به علاوه برای امکان ترکیب تابع به شکل gf می بایست، مجموعه تصویر تابع f دامنه یا زیرمجموعه ای از دامنه تابع g باشد.

مثال ۳:

اگر $f: x \rightarrow x^2 + 5$ و $g: x \rightarrow x + 2$ ، آنگاه خواهیم داشت:

$$(الف) gf: x \rightarrow (x^2 + 5) + 2 \equiv x^2 + 7$$

$$(ب) fg: x \rightarrow (x + 2)^2 + 5 \equiv x^2 + 4x + 4 + 5 = x^2 + 4x + 9$$

$$(پ) ff: x \rightarrow (x^2 + 5)^2 + 5 \equiv x^2 + 10x^2 + 25 + 5 = x^2 + 10x^2 + 30$$

$$(ت) gg: x \rightarrow (x + 2) + 2 \equiv x + 4$$

توجه کنید؛ $[f(x)]^2 = (x^2 + 5)^2 \equiv x^2 + 10x^2 + 25$ و این با نتیجه به کارگیری نگاشت ff روی x یکسان نمی باشد.

اتحادها و معادلات

خواننده توجه دارد که در مثال بالا ما از نماد \equiv استفاده کردیم، که به صورت «متحد است با» خوانده می شود. ما از این نماد زمانی استفاده می کنیم که رابطه ای جبری داشته باشیم و آن رابطه به ازای جميع مقادیر برای متغیر x برقرار باشد.
برای مثال:

$$(x + 2)^2 \equiv x^2 + 4x + 4$$

چنین رابطه جبری را یک اتحاد می نامیم.

از طرف دیگر، عبارت: $(x + 2)^2 = 9x - 2$ فقط زمانی درست است که $x = 2$ یا $x = 3$ یک رابطه جبری را که فقط به ازای مجموعه ای خاص از مقادیر x درست است معادله می نامیم.

توابع معکوس

هرگاه با در نظر گرفتن تابع f ، بتوان تابعی مانند g یافت به قسمی که $gf: x \rightarrow x$ و همچنین $fg: x \rightarrow x$ ، در این صورت g به صورت f^{-1} نمایش داده می شود و به آن معکوس f می گوئیم.

در حالت کلی، برای تابعی چون f یک معکوس مانند f^{-1} داریم هرگاه شروط زیر صادق باشند:

$$(۱) f^{-1}f = f f^{-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{برای هر } x_1 \text{ و } x_2 \text{ در دامنه } f \\ (2) \quad x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \\ (3) \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \end{array} \right\}$$

مثال ۴ :

(الف) $f: x \rightarrow 3x + 1$

بنابراین: $f: \frac{(y-1)}{3} \rightarrow y$ در نتیجه: $f^{-1}: y \rightarrow \frac{(y-1)}{3}$ یا: $f^{-1}: x \rightarrow \frac{(x-1)}{3}$ که دامنه و بُرد آن IR می باشد.

(ب) $f: x \rightarrow \frac{1}{x}$

بنابراین: $f^{-1}: y \rightarrow \frac{1}{y}$ یا: $f^{-1}: x \rightarrow \frac{1}{x}$

پس وارون f ، خودش می باشد.

مثالهای بالا دستور زیر را برای به دست آوردن معکوس یک تابع پیشنهاد می کنند.

اگر $y = f(x)$ معادله نمودار هر تابع مانند f بوده به قسمی که آن تابع دارای یک معکوس باشد، در این صورت (برای به دست آوردن ضابطه تابع معکوس آن به این شکل عمل می کنیم).

- (۱) در معادله نمودار جای x و y را عوض می کنیم به طوری که داشته باشیم $x = f(y)$.
- (۲) در صورت امکان از رابطه $x = f(y)$ ، y را بر حسب x می یابیم.
- نتیجه حاصل معکوس تابع یعنی f^{-1} را در صورت وجود به ما می دهد.
- (پ) تابع $f: x \rightarrow x^2$ را با دامنه IR در نظر می گیریم. واضح است، دو عدد ۲ و -۲ روی عدد ۴ نگاشته می شوند ($f(2) = 4$ و $f(-2) = 4$). به هر صورت این امکان نیست که بیان کنیم منحصرأ یک نقطه روی ۴ نگاشته می شود، این تابع دارای معکوس نمی باشد.
- در هر حال، اگر دامنه را به IR^+ ، مجموعه عددهای حقیقی مثبت، محدود کنیم، آنگاه f به روی هم دامنه اش IR^+ نگاشته می شود و دارای معکوس است:

$$f^{-1}: x \rightarrow \sqrt{x}$$

(۱) با توجه به این که f را یک تابع فرض کرده ایم؛ شرط دوم همواره برقرار می باشد.

(توجه کنید که ما برای نشان دادن ریشه دومی مثبت x از \sqrt{x} استفاده می‌کنیم.)
 (ت) اگر $f: x \rightarrow x+1$ و $g: x \rightarrow x^2$ در این صورت: $fg: x \rightarrow x^2+1$ با حل
 معادله $x = y^2+1$ معکوس به دست می‌آید، که خواهیم داشت: $y = \pm \sqrt{x-1}$. برای
 این که $(fg)^{-1}$ تابع باشد باید دامنه و بُرد جدیدی را به $x \geq 1$ محدود کنیم، می‌گوییم، ریشه
 دومی مثبت از $(x-1)$. بنابراین $(fg)^{-1}: x \rightarrow +\sqrt{x-1}$ برای $x \geq 1$.

توجه دارید که $f^{-1}: x \rightarrow x-1$

$$g^{-1}: x \rightarrow +\sqrt{x}$$

$$\text{و } g^{-1}f^{-1}: x \rightarrow +\sqrt{x-1} \text{ برای } x \geq 1.$$

بنابراین: با محدودیت بالا روی دامنه و بُرد $(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$.

به علاوه توجه داریم که (مطلب فوق) در وهله اول ممکن است تا حدودی عجیب به نظر آید.
 به هر حال (دستورها و تعریفهای فوق راجع به معکوس تابع) با این تجربه عملی مطابقت
 دارد - (عملِ تابع به منزله) «راندن ماشین به داخل گاراژ و سپس بستن درب گاراژ است» اما
 معکوس تابع «ابتدا درب را باز می‌کند و سپس ماشین را به بیرون می‌راند».

نتیجه کلی این که: برای هر تابع مانند f, g, \dots, p, q که معکوس تابع $(fg \dots pq)^{-1}$
 وجود داشته باشد: $(fg \dots pq)^{-1} = q^{-1}p^{-1} \dots g^{-1}f^{-1}$

اثبات رابطه بالا توسط استقرا امکان پذیر است (به صفحه ۷۳ مراجعه کنید).

۱.۲ نماها، اعداد گنگ (رادیکالی) و لگاریتمها

نماها

سه دستور اساسی نماها عبارتند از:

(۱) برای ضرب توانها با پایه متشابه نماها را باهم جمع می‌کنیم:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

(۲) برای تقسیم توانها با پایه متشابه نماها را از هم کم می‌کنیم:

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

(۳) برای این که توان یک پایه را مجدداً به توان برسانیم نماها را درهم ضرب می‌کنیم:

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

این دستورها برای $m, n \in \mathbb{Z}^+$ به کار می‌رود. اگر ما عددهای $m, n \in \mathbb{Q}$ را به کار ببریم تعبیرهای زیر برای ما ایجاب می‌شود:

$$\text{توان منفی، } a^{-m} \equiv \frac{1}{a^m} \text{ برای } m > 0$$

$$\text{توان صفر، } a^0 \equiv 1$$

$$\text{توان ساده کسری، } a^{\frac{1}{m}} \equiv \sqrt[m]{a} \text{ برای } m > 0$$

$$\text{توان گویا، } a^{\frac{n}{m}} \equiv \sqrt[m]{a^n} \text{ برای } m > 0$$

مثال ۵:

$$\text{(الف)} \left(\frac{25}{36}\right)^{\frac{r}{2}} = \left[\sqrt{\frac{25}{36}}\right]^r = \left(\frac{5}{6}\right)^r = \frac{125}{216}$$

$$\text{(ب)} (27)^{\frac{r}{3}} = ({}^3\sqrt{27})^r = 3^r = 9$$

$$\text{(پ)} (16)^{\frac{r}{4}} \times (8)^{\frac{-1}{2}} = \frac{{}^4\sqrt{(16)^r}}{{}^2\sqrt{8}} = \frac{2^r}{2} = 4$$

$$\begin{aligned} \text{(ت)} 4^{\frac{-1}{2}} + \left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{4}} - (64)^{\frac{-1}{3}} &= \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(81)^{\frac{1}{4}}} - \frac{1}{(64)^{\frac{1}{3}}} = \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} &= \frac{6+4-3}{12} = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

مثال ۶:

$$\text{(الف)} \frac{y^{1/6} y^{-1/3}}{y^{1/2}} = y^{1/6 - 1/3 - 1/2} = y^{(2-3-3)/12} = y^{-5/12}$$

$$\text{(ب)} \frac{x(x+1)^{1/2} - (x+1)^{-1/2}}{x^2} = \frac{x(x+1) - 1}{x^2(x+1)^{1/2}} = \frac{x^2+x-1}{x^2(x+1)^{1/2}}$$

$$\text{(پ)} \frac{\sqrt{x} \sqrt{x^2}}{x^{-2}} = \sqrt{x^2 \cdot x^2} = x^2 \cdot x^2 = x^4$$

اعداد گنگ

تنها، عددهای مشخصی از مجموعه عددهای تعریف شده توسط \sqrt{x} برای هر $x \in \mathbb{Z}^+$ ، دارای مقادیر عددی درست می باشند، مانند: $\sqrt{1}$ ، $\sqrt{4}$ ، $\sqrt{9}$ ، $\sqrt{16}$ ، $\sqrt{25}$ و تعداد دیگری از عددهای این مجموعه، مانند $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، به صورت کسریهای درست عددی نوشته نمی شوند، و غالباً مناسبتر است آنها را به شکل اصلی خودشان یعنی \sqrt{x} نمایش دهیم. چنین عددهایی را گنگ می نامیم، و عبارتهای شامل آنها را عبارتهای گنگ می نامند. شایسته است که چنین عبارتهایی به شکل ساده شده خودشان نوشته شوند. مثالهایی که در زیر آمده است چگونگی این روش را نشان می دهند. دو قاعده اساسی حاصل از دستورهای مربوط به نماها، (در این دو مثال) به کار رفته اند:

$$(\sqrt{x}) \times (\sqrt{y}) = \sqrt{xy} \quad [x^{1/2} y^{1/2} = (xy)^{1/2} \text{ از دستور}]$$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}} \quad [\frac{x^{1/2}}{y^{1/2}} = (\frac{x}{y})^{1/2} \text{ از دستور}] \quad \text{و}$$

مثال ۷ :

عبارتهای گنگ زیر را به ساده ترین شکل خود بیان کنید:

$$(الف) \frac{1}{3} \sqrt{18} \quad (ب) 2\sqrt{2}(\sqrt{32} + \sqrt{2}) \quad (پ) (2\sqrt{5} + 1)(3\sqrt{5} + 2)$$

$$(ت) \sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{80} + \sqrt{5}$$

$$(الف) \frac{1}{3} \sqrt{18} = \frac{1}{3} \sqrt{(9 \times 2)} = \frac{1}{3} 3\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$(ب) 2\sqrt{2}(\sqrt{32} + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}(4\sqrt{2} + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}(5\sqrt{2}) = 20$$

$$(پ) (2\sqrt{5} + 1)(3\sqrt{5} + 2) = 6 \times 5 + 7\sqrt{5} + 2 = 32 + 7\sqrt{5}$$

$$(ت) \sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{80} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

مثال ۸ :

در عبارتهای گنگ زیر عددهای گنگ را از مخرج کسر حذف می کنیم (این روش

گویا کردن مخرج کسر نام دارد):

$$(الف) \frac{2}{\sqrt{18}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3 \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$(ب) \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

در این جا می توانیم از اتحاد $(x+y)(x-y) \equiv (x^2-y^2)$ استفاده کنیم.
صورت و مخرج کسر را در $(\sqrt{2}+1)$ ضرب کرده، عبارت زیر حاصل می شود:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$$

$$(پ) \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}+\sqrt{3}} =$$

$$\frac{4\sqrt{15}+2 \times 3}{20-3} = \frac{4\sqrt{15}+6}{17}$$

$$(ت) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$$

هر دو کسر را با هم گویا می کنیم و خواهیم داشت:

$$\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{3+\sqrt{3}}{2} + \frac{3-\sqrt{3}}{2} = 3$$

لگاریتمها

کلمه «لگاریتم» مفهوم دیگری است برای نمایش نما یا توان یک مبناي مثبت. برای مثال، نظر به این که $2^3 = 8$ ، ما نمای ۳ را لگاریتم ۸ در مبناي ۲ تعریف می کنیم و می نویسیم:

$$\log_2 8 = 3$$

به علاوه، می‌توانیم از دستورنماهای منفی نیز استفاده کنیم و مثلاً برای $(\frac{1}{3})^{-2} = 9$ می‌نویسیم:

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$$

مبنای یک لگاریتم می‌تواند هر عدد مثبتی باشد. جداول لگاریتمهای اعشاری، که معمولاً برای محاسبات مورد استفاده قرار می‌گیرند، دارای مبنای ۱۰ هستند. معمولاً، برای استفاده از لگاریتم اعشاری، مبنای ۱۰ را حذف کرده، و آن را به صورت \log یا Lg می‌نویسیم. در حالت کلی:

$$a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x \quad y > 0$$

مثال ۹:

(تساویها را) به شکل لگاریتمی نشان دهید:

$$(الف) 5^2 = 25 \quad (ب) 2^5 = 32 \quad (پ) 6^0 = 1 \quad (ت) \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 125$$

$$(ث) 10^{-2} = 0.01$$

$$(الف) 5^2 = 25 \Rightarrow \log_5 25 = 2$$

$$(ب) 2^5 = 32 \Rightarrow \log_2 32 = 5$$

$$(پ) 6^0 = 1 \Rightarrow \log_6 1 = 0$$

$$(ت) \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 125 \Rightarrow \log_{\frac{1}{5}} 125 = -2$$

$$(ث) 10^{-2} = 0.01 \Rightarrow \log_{10} 0.01 = -2$$

مثال ۱۰ :

محاسبه کنید:

$$\log_{\frac{1}{4}} 4 \quad (\text{پ}) \quad \log_{10} 0.001 \quad (\text{ب}) \quad \log_7 49 \quad (\text{الف})$$

$$\log_7 49 = x \Rightarrow 7^x = 49 = 7^2 \quad (\text{الف})$$

با مقایسه نماها خواهیم داشت: $x = 2$.

$$\log_{10} 0.001 = y \Rightarrow 10^y = 0.001 = 10^{-3}$$

بنابراین: $y = -3$.

$$\log_{\frac{1}{4}} 4 = z \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^z = 4 = 2^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

بنابراین: $z = -2$.

مثال ۱۱ :

(تساویها را) به شکل نمایی نشان دهید:

$$\log_5 125 = 3 \quad (\text{الف}) \quad \log_{10} 100 = 2 \quad (\text{ب}) \quad \log_{\frac{1}{27}} 6 = \frac{1}{3} \quad (\text{پ})$$

$$\log_a 1 = 0 \quad (\text{ت}) \quad \log_x y = z$$

$$\log_5 125 = 3 \Rightarrow 5^3 = 125 \quad (\text{الف})$$

$$\log_{10} 100 = 2 \Rightarrow 10^2 = 100 \quad (\text{ب})$$

$$\log_{\frac{1}{27}} 6 = \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = 6 \quad (\text{پ})$$

$$\log_a 1 = 0 \Rightarrow a^0 = 1 \quad (\text{ت})$$

$$\log_x y = z \Rightarrow x^z = y \quad (\text{ث})$$

قواعد لگاریتمها

(۱) جمع لگاریتمها

اگر قرار دهیم: $\log_a x = m$ و $\log_a y = n$ در این صورت: $x = a^m$ ، $y = a^n$

$$xy = a^m \times a^n = a^{m+n} \Rightarrow \log_a(xy) = m + n$$

بنابراین:

$$\log_a(xy) \equiv \log_a x + \log_a y$$

(۲) تفریق لگاریتمها

$$\frac{x}{y} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{با توجه به قرارداد بالا) به طور مشابه خواهیم داشت:}$$

بنابراین:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) \equiv \log_a x - \log_a y$$

(۳) لگاریتم از اعداد توانی

$$x^p \equiv (a^m)^p = a^{mp}$$

بنابراین:

$$\log_a x^p = mp = p \log_a x$$

پس:

$$\log_a x^p = p \log_a x$$

(۴) تغییر مبنای یک لگاریتم

$$\log_a x \equiv m \Rightarrow a^m = x$$

$$\log_b x \equiv \log_b(a^m) = m \log_b a$$

$$\Rightarrow \log_b x \equiv (\log_a x) \times (\log_b a)$$

یعنی، برای تغییر مبنای لگاریتم x از مبنای a به b آن را در $\log_b a$ ضرب می‌کنیم.
هرگاه در این نتیجه‌گیری جای x را با a تعویض کنیم، خواهیم داشت:

$$\log_b a \equiv \log_a a \times \log_b a$$

با تقسیم طرفین بر $\log_b a$ ، که مخالف صفر است؛

$$\Rightarrow \log_a a = 1$$

و، اگر $x = b$

$$\log_b b \equiv 1 \equiv (\log_a b) \times (\log_b a)$$

مثال ۱۲ :

(عبارات زیر را) ساده کنید:

(الف) $4\log_2 2 + 2\log_2 3$

(ب) $\log_{10} \left(\frac{15}{64} \right) - 2\log_{10} \left(\frac{3}{5} \right) + \log_{10} \left(\frac{16}{9} \right)$

(پ) $3\log_2 x + 2\log_2 y - \log_2 z$

(الف) $4\log_2 2 + 2\log_2 3 = \log_2 2^4 + \log_2 3^2$ با توجه به
قاعده (۳)

$$\log_2 16 + \log_2 9 = \log_2 144$$

(ب) $\log_{10} \left(\frac{15}{64} \right) - 2\log_{10} \left(\frac{3}{5} \right) + \log_{10} \left(\frac{16}{9} \right) =$

$$\log_{10} \left(\frac{15}{64} \right) - \log_{10} \left(\frac{3^2}{5^2} \right) + \log_{10} \left(\frac{16}{9} \right)$$

$$\stackrel{\text{با توجه به قاعده (۳)}}{=} \log_{10} \left(\frac{15}{64} \times \frac{25}{9} \times \frac{16}{9} \right) \stackrel{\text{قواعد (۱) و (۲)}}{=} \log_{10} \left(\frac{15 \times 25 \times 16}{64 \times 9 \times 9} \right)$$

(پ) $3 + \log_2 x + 2\log_2 y - \log_2 z = \log_2 x^3 + \log_2 y^2 - \log_2 z$

$$\stackrel{\text{قواعد (۱) و (۲) و (۳)}}{=} \log \frac{x^3 y^2}{z}$$

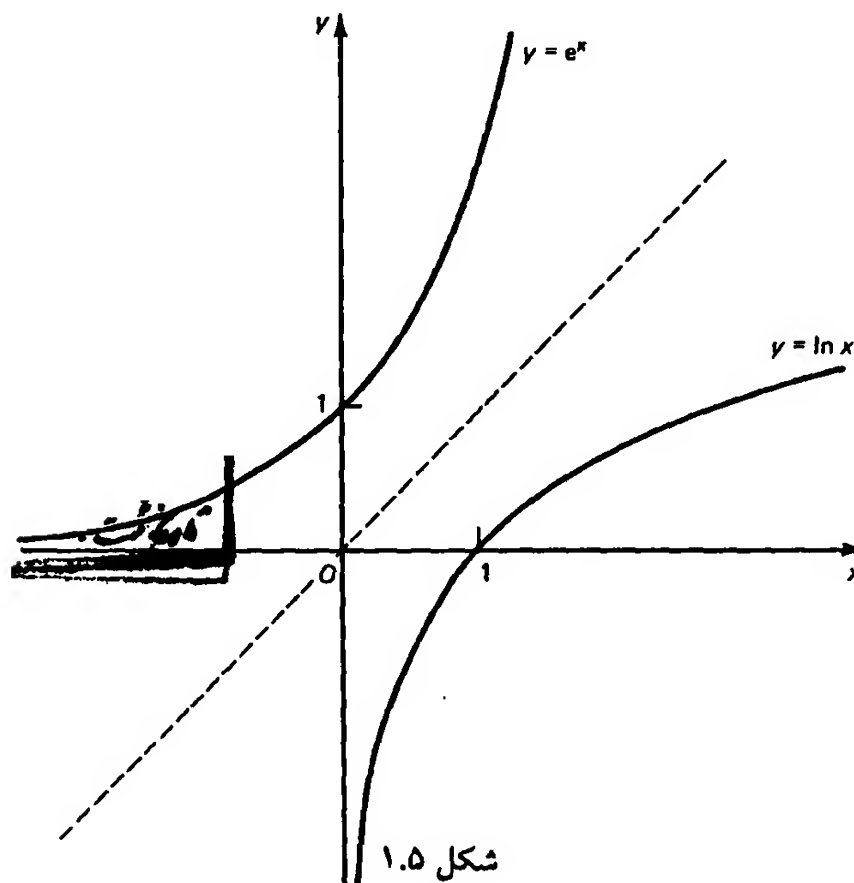
مثال ۱۳ :

فقط با استفاده از قواعد لگاریتمها مقدار $\log_3 125 \times \log_5 9$ را بیابید:

$$\begin{aligned}\log_3 125 \times \log_5 9 &= \log_3 5^3 \times \log_5 3^2 = 3 \log_3 5 \times 2 \log_5 3 \\ &= 6 (\log_3 5) (\log_5 3) = 6 \log_5 5 = 6\end{aligned}$$

۱.۳ توابع لگاریتمی و نمایی

در حساب لگاریتمها از یک مبنای بخصوص استفاده می شود. این نوع لگاریتم، لگاریتم طبیعی نامیده می شود و مبنای آن با e نمایش داده می شود. عدد $e \approx 2.7182818$ می باشد و آن به عنوان مبنایی برای تابع $\log_e x$ در نظر گرفته شده است که در $x = 1$ دارای شیب واحد می باشد. نمایش استاندارد آن به شکل: $\log_e x = \ln x$ می باشد. دامنه تابع $\ln x$ ، IR^+ است و آنرا تابع لگاریتمی می نامند. برد این تابع IR است. تابع معکوس آنرا تابع نمایی، $\exp x$ ، (یا) e^x می نامیم که آنرا به صورت e^x نمایش می دهند.



دامنه تابع نمایی IR و بُردش IR^+ است. به طور خلاصه؛

$$y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x$$

نمودارهای $y = \ln x$ و $y = e^x$ در شکل ۱.۵ آمده است. توجه کنید که، همواره e^x و $\ln x$ معکوس یکدیگرند، نمودارهای آنها نسبت به خط $y = x$ تصویر معکوس یکدیگر می باشند. (خط $y = x$ با نقطه چین مشخص شده است).

مثال ۱۴ :

(کسر زیر را) ساده کنید:

$$\frac{e^{2x} - \ln e}{e^x + e^{\ln 1}}$$

توجه داریم که $\ln e = 1$ و، چون $\ln 1 = 0$ ، داریم: $e^{\ln 1} = e^0 = 1$ ، بنابراین:

$$\frac{e^{2x} - \ln e}{e^x + e^{\ln 1}} \equiv \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1}$$

از آن جا که $e^{2x} \equiv (e^x)^2$ می توان نوشت:

$$e^{2x} - 1 \equiv (e^x + 1)(e^x - 1)$$

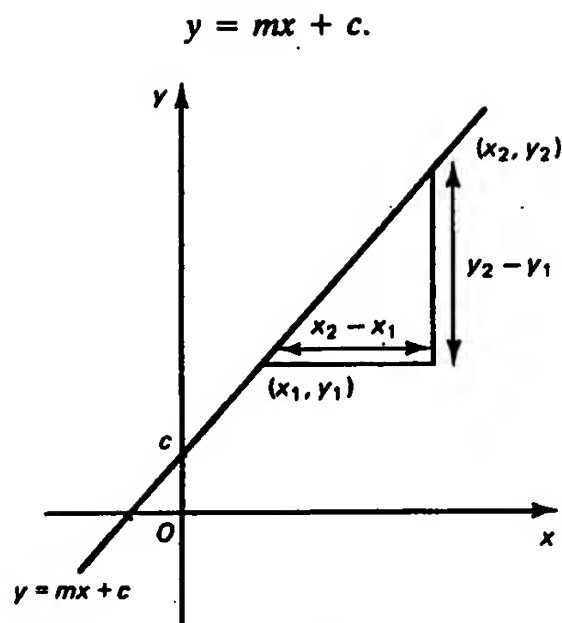
و بنابراین:

$$\frac{e^{2x} - \ln e}{e^x + e^{\ln 1}} \equiv \frac{(e^x + 1)(e^x - 1)}{(e^x + 1)} \equiv e^x - 1$$

۱.۴. رابطه های خطی

یک معادله به شکل $px + qy + r = 0$ ، به قسمی که p و q عددهای ثابت مخالف صفری بوده، و در آن x و y موجود اما x^2 ، y^2 ، یا هر حاصل ضرب از x و y وجود نداشته باشد، رابطه ای خطی نامیده می شود و می گوئیم که متغیرهای x و y در یک رابطه خطی صدق می کنند. یا به عبارت دیگر یک رابطه خطی بین x و y وجود دارد.

معمولاً طرفین این رابطه را بر q تقسیم کرده و معادله را به شکل استاندارد $y = mx + c$



شکل ۱.۶

مرتب می‌کنیم.

وقتی که معادله را به شکل استاندارد بنویسیم، ثابتهای m و c دارای تعبیرهای ساده‌ای می‌باشند که (این تعبیرها) به راحتی با رسم نمودار y بر حسب x به دست می‌آیند. اگر $c = y = c, x = 0$ نقطه‌ای است دلخواه روی محور y ها. اگر (x_1, y_1) و (x_2, y_2) دو نقطه دلخواه از این خط باشند، در این صورت:

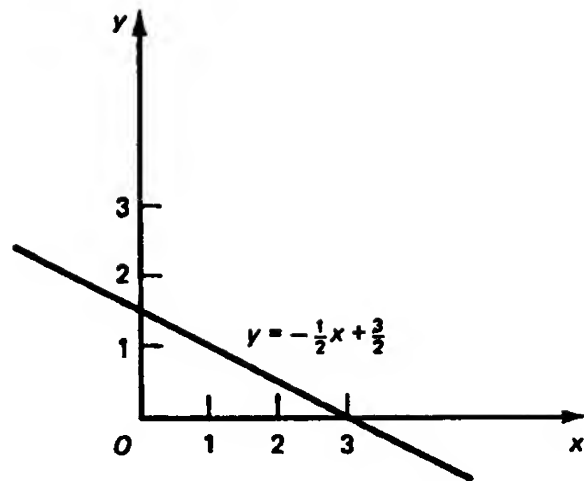
$$\left. \begin{array}{l} y_1 = mx_1 + c \\ y_2 = mx_2 + c \end{array} \right\} \Rightarrow y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1) \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

بنابراین؛ m شیب خط می‌باشد. باید به علامت m توجه داشته باشیم. در صورتی که m منفی باشد مشخص می‌کند که خط با محور x ها زاویه منفرجه می‌سازد. (مثال ۱۵ را که در زیر آمده مشاهده کنید).

مثال ۱۵ :

شیب و محل برخورد با محور x ها و y ها را برای خط $2x + 4y = 6$ پیدا کنید. با نوشتن به شکل استاندارد، خط به صورت $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ حاصل می‌شود. با توجه به

توابع جبری ۲۷



شکل ۱.۷

بالا $m = -\frac{1}{2}$ و $c = \frac{3}{2}$. بنابراین شیب خط $-\frac{1}{2}$ و محل تقاطع آن با محور y ها نقطه‌ای است به عرض $\frac{3}{2}$. نمودار این خط در شکل ۱.۷ نشان داده شده است.

هرگاه $y = 0$ خواهیم داشت: $0 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow x = 3$. بنابراین محل تقاطع آن با محور x ها نقطه‌ای است به طول ۳.

تحويل به شکل خطی

در بالا مشاهده کردیم که ثابتهای اصلی در یک شکل خطی به راحتی از طریق رسم پیدا می‌شوند. حال اگر بدانیم که دو متغیر فیزیکی x و y به طریقی با یکدیگر مربوط می‌باشند، در این صورت ممکن است بتوانیم ماهیت دقیقی از ارتباط آنها پیدا کنیم (توسط مراحل زیر).

- (۱) چند زوج از مقادیر (x, y) به دست می‌آوریم،
 - (۲) نمودار مشخص شده توسط آنها (زوج مرتبهای به دست آمده) را رسم می‌کنیم،
 - (۳) به طور مجزا شیب و محل برخورد با محور y ها را مشخص می‌کنیم.
- به هر حال، تعدادی از رابطه‌های بین زوجهای با متغیرهای فیزیکی خطی نیستند. ما اکنون در نظر داریم چگونگی امکان ساده شدن به یک شکل خطی را با ایجاد یک تغییر متغیر مناسب توضیح دهیم. مثالهای زیر این تکنیک (به شکل خطی درآوردن) را نشان می‌دهند.

مثال ۱۶ :

نشان دهید، توسط تغییر متغیرهای مناسب، می توان عبارتهای زیر را به رابطه های خطی تبدیل کرد:

$$(پ) ax + by = xy \quad (ب) y = ab^x \quad (الف) y = kx^n$$

$$(ت) y = ax^r + bx$$

(الف) اگر از طرفین معادله، لگاریتم بگیریم، خواهیم داشت:

$$\log y = \log kx^n = \log k + \log x^n = \log k + n \log x$$

تعریف می کنیم: $Y = \log y$ و $X = \log x$ ؛ در این صورت، رابطه $Y = \log k + nX$ را به دست می آوریم که رابطه ای خطی بین Y و X است.

(ب) از طرفین لگاریتم می گیریم که رابطه $\log y = \log a + x \log b$ به دست می آید. اگر $Y = \log y$ رابطه $Y = \log a + x \log b$ به دست خواهد آمد. این بار رابطه ای خطی، بین Y و x حاصل می شود.

$$(پ) \text{ فرض کنیم؛ } ax + by = xy, \text{ با تقسیم طرفین بر } xy \text{ خواهیم داشت: } \frac{a}{y} + \frac{b}{x} = 1$$

قرار می دهیم، $Y = \frac{1}{y}$ و $X = \frac{1}{x}$ ، خواهیم داشت: $aY + bX = 1$ ، که رابطه ای خطی ایجاد می شود.

(ت) با تقسیم طرفین معادله $y = ax^r + bx$ بر x ، معادله $\frac{y}{x} = ax^r + b$ را به دست

می آوریم. اگر قرار دهیم: $Y = \frac{y}{x}$ و $X = x^r$ ، خواهیم داشت: $Y = aX + b$ ، که رابطه ای است خطی.

تمرین ۱:

۱- دامنه و بُرد متناظر با آن را برای هر یک از رابطه های زیر که تابع می باشند به جامعترین حالت ممکن شرح دهید:

$$(پ) h: x \rightarrow 5x^2 + 2, \quad (ب) g: x \rightarrow \frac{1}{1+x^2}, \quad (الف) f: x \rightarrow 1 - 2x$$

برای هر کدام، از مثال ۱ الگو بگیرید.

۲- کدام یک از توابع در سؤال ۱ زوج، فرد یا نه زوج و نه فرد است؟

۳- اگر $f: x \rightarrow 2x - 1$ و $g: x \rightarrow x^2$ ، در این صورت توابع fg ، gf ، ff و gg را به شکل $x \rightarrow$ بیان کنید.

۴- معکوس توابع زیر را پیدا کرده، دامنه‌ای مناسب برای هر یک بیان کنید:

(الف) $f: x \rightarrow 5 - 2x$ (ب) $g: x \rightarrow \frac{4}{x-1}$ (پ) $h: x \rightarrow (2x+1)^2$

۵- دامنه و هم دامنه مناسبی برای رابطه‌های زیر پیشنهاد کنید، که معکوس توابع برای این تابعها قابل تعریف باشد.

(الف) $r_1: x \rightarrow 16x^2$ (ب) $r_2: x \rightarrow \frac{1}{2+x}$ (پ) $r_3: x \rightarrow x^2 - 4$

۶- مجموعه $D = \{x: x \in \mathbb{R}, -2 < x < 3\}$ دامنه تابع f می‌باشد. تابع $f: D \rightarrow$

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & -2 < x \leq 1 \\ x^2 & 1 < x \leq 2 \\ 8 - 2x & 2 < x < 3 \end{cases} \quad \text{باضابطه}$$

$f(x)$ تعریف می‌شود.

برد این تابع را پیدا کرده و نمودارش را طرح کنید. توضیح دهید که چرا تابع معکوس برای f وجود ندارد. بازه‌ای پیشنهاد کنید به طوری که، f در این بازه محدود شده، دارای تابع معکوسی باشد. در این حالت ضابطه‌ای برای تابع معکوس به دست آورید.

۷- بدون استفاده از جدولها یا ماشین حساب، (حاصل هریک را) محاسبه کنید:

(الف) $9^{-3/2}$ (ب) $\left(\frac{125}{8}\right)^{2/3}$ (پ) $\frac{25^{1/2} \times 16^{-1/2}}{36^{3/2}}$ (ت) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \times 4^0$

(ث) $9^{1/2} + \left(\frac{1}{125}\right)^{1/3} - (36)^{-1/2}$

۸- هریک از عبارتهای زیر را به ساده‌ترین شکل ممکن تقلیل دهید:

(الف) $\frac{\sqrt{x}\sqrt{x^5}}{x^{-2}}$ (ب) $\frac{y^{1/2}y^{-1/2}}{y^{1/6}}$ (پ) $(x^5)^2 \div (x^2)^2$ (ت) $6x^{-3/2} \div 3x^{-1/2}$

(ث) $\frac{(x+1)^{-1/2} - 2(x+1)^{2/3}}{(x+1)^{1/3}}$ (ج) $x^{-1} + 2x^{-2} - 3x^{-2}$

۹- در زیر هریک از عبارتهای گنگ را به ساده‌ترین شکل ممکن تقلیل دهید.

(الف) $\sqrt{90}$ (ب) $\frac{1}{2}\sqrt{48}$ (پ) $\sqrt{18} \times \sqrt{50}$ (ت) $(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+2)$

(ث) $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{75}$

۱۰- عبارتهای گنگ زیر را به شکلی بیان کنید که مخرج آنها گویا شود:

(الف) $\frac{3}{\sqrt{27}}$ (ب) $\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ (پ) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}$

۱۱- (تساویهای زیر را) به شکل لگاریتمی بیان کنید:

(الف) $3^2 = 9$ (ب) $8^0 = 1$ (پ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 81$ (ت) $a^b = 2$

۱۲- بدون استفاده از جدولها یا ماشین حساب، (حاصل هریک را) محاسبه کنید:

(الف) $\log_{1/2} 8$ (ب) $\log_{10} 0.1$ (پ) $\log_{16} 64$

۱۳- (تساویهای زیر را) به شکل نمایی بیان کنید:

(الف) $\log_{10} 10 = 1$ (ب) $\log_3 81 = 4$ (پ) $\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$

۱۴- (عبارتهای زیر را) ساده کنید:

(الف) $\frac{1}{2} \log_8 9 + 3 \log_8 2 - 2 \log_8 4$ (ب) $3 \log_{10} 2 - \frac{1}{4} \log_{10} 16 + 2 \log_{10} 5$

۱۵- اگر $\log_{10} 2 = a$ ، نشان دهید که $\log_8 5 = \left(\frac{1-a}{3a}\right)$.

۱۶- (عبارت زیر را) ساده کنید:

$$\frac{e^{2x} - \text{Lne}}{[e^{(x+1)/2}]^2 + e}$$

۱۷- در زیر برای هریک تغییر متغیری مناسب پیدا کنید به قسمی که رابطه‌ای خطی

ایجاد شود:

(الف) $v = ac^{nu}$ (ب) $s = ut + \frac{1}{2} ft^2$ (پ) $x^k y = a$

چند جمله‌ایها و توابع گویا

۲.۱ چند جمله‌ایها، قضیه باقی مانده و قضیه فاکتور (تجزیه)

هر عبارت به شکل

(۲.۱) $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ که در آن a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 و a_0 عددهای ثابت و n عددی صحیح می‌باشد، یک چندجمله‌ای نامیده می‌شود. بزرگترین توان x که در این عبارت به چشم می‌خورد درجه یا مرتبه چندجمله‌ای تعریف شده و a_i ها ضرایب نامیده می‌شوند. اگر در معادله (۲.۱) $a_n \neq 0$ باشد، چندجمله‌ای از درجه n است و a_i ($i = 0, 1, \dots, n$)، i ضریب x^i می‌باشد. جمله‌ای که شامل x نمی‌باشد، مثلاً a_0 ، جمله ثابت نامیده می‌شود. معمولاً برای نوشتن یک چندجمله‌ای به روشی اصولی، یا مانند معادله (۲.۱) آن را برحسب قوای نزولی و یا برحسب قوای صعودی مرتب می‌کنیم، در صورتی که معادله (۲.۱) را برعکس بنویسیم برحسب قوای صعودی مرتب می‌شود.

$$(۲.۲) \quad a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

چند جمله‌ایهای از درجه ۲، ۳ و ۴ به ترتیب درجه دو، درجه سه و درجه چهار نامیده می‌شوند.

اعمال چند جمله‌ایها

جمع و تفریق

برای جمع یا تفریق چند جمله‌ایها، جمله‌های متشابه را کنار یکدیگر جمع‌آوری کرده، و با استفاده از قانون پخشی، جمله‌ها را با هم ترکیب می‌کنیم.

مثال ۱ :

فرض کنیم؛ $P(x) \equiv 2x^2 + 3x^2 + 2$ و $Q(x) \equiv 4x^2 + 3x^2 + 5x + 1$ ، در این صورت؛
 $P(x) + Q(x)$ و $P(x) - Q(x)$ را پیدا کنید:

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &\equiv (2x^2 + 3x^2 + 2) + (4x^2 + 3x^2 + 5x + 1) \\ &\equiv 4x^2 + (2x^2 + 3x^2) + 3x^2 + 5x + (2 + 1) \\ &\equiv 4x^2 + 5x^2 + 3x^2 + 5x + 3 \\ P(x) - Q(x) &\equiv (2x^2 + 3x^2 + 2) - (4x^2 + 3x^2 + 5x + 1) \\ &\equiv -4x^2 + (2x^2 - 3x^2) + 3x^2 - 5x + (2 - 1) \\ &\equiv -4x^2 - x^2 + 3x^2 - 5x + 1 \end{aligned}$$

ضرب

همچنین، در این جا لازم است از خاصیت توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع استفاده شود. این موضوع در مثالهای ۲ و ۳ توضیح داده شده است.

مثال ۲ :

از عبارت $x^2(x^2 + x + 1) + x(x^2 + 1)$ یک چندجمله‌ای بر حسب قوای نزولی x به دست آورید:

$$\begin{aligned} x^2(x^2 + x + 1) + x(x^2 + 1) &\equiv (x^2 + x^2 + x^2) + (x^2 + x) \\ &\equiv x^2 + (x^2 + x^2) + x^2 + x \equiv x^2 + 2x^2 + x^2 + x \end{aligned}$$

مثال ۳ :

عبارت $(x^2 - 2x + 1)$ را در عبارت $(x^2 + x - 2)$ ضرب کنید:

$$\begin{aligned} (x^2 - 2x + 1)(x^2 + x - 2) &\equiv x^2(x^2 + x - 2) - 2x(x^2 + x - 2) + 1(x^2 + x - 2) \\ &\equiv x^2 + x^2 - 2x^2 - 2x^2 - 2x^2 + 4x + x^2 + x - 2 \\ &\equiv x^2 + (x^2 - 2x^2) + (-2x^2 - 2x^2 + x^2) + (4x + x) - 2 \\ &\equiv x^2 - x^2 - 3x^2 + 5x - 2 \end{aligned}$$

برقراری یک تشابه بین ضرب معمولی و آنچه در مثال ۳ به کار گرفته شد، روش زیر را برای ما استخراج می‌کند:

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 2x + 1 \\
 x^2 + x - 2 \\
 \hline
 -2x^2 + 4x - 2 \quad \text{یعنی} \quad -2(x^2 - 2x + 1) \\
 x^2 - 2x^2 + x \quad \text{یعنی} \quad x(x^2 - 2x + 1) \\
 x^2 - 2x^2 + x^2 \quad \text{یعنی} \quad x^2(x^2 - 2x + 1) \\
 \hline
 x^2 - x^2 - 3x^2 + 5x - 2
 \end{array}$$

مرتب کردن چند جمله‌ایها قبل از انجام این روش مهم است. توجه داریم که علامتهای منها در جبر وجود دارند و در این جا چیزی از بین نمی‌رود. قالب دیگری که معمولاً به هنگام برنامه‌ریزی یک کامپیوتر برای کار روی چند جمله‌ایها مورد استفاده قرار می‌گیرد، روش ضرایب جدا از هم نامیده می‌شود. برای نمایش این قالب، مثال ۳ مناسب است:

x^2	x^2	x^2	x	1
		1	-2	1
		1	1	-2
		-2	4	-2
	1	-2	1	
1	-2	1		
1	-1	-3	5	-2

مثال ۴:

حاصل ضرب $(x^2 + x - 1)(2x - 3)$ را به دست آورید:

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 0x^2 + x - 1 \\
 2x^2 - 3 \\
 \hline
 -3x^2 + 0x^2 - 3x + 3 \\
 2x^2 + 0x^2 + 2x^2 - 2x \\
 \hline
 2x^2 - 3x^2 + 2x^2 - 5x + 3
 \end{array}$$

در بعضی از تمرینها ضرب چند جمله‌ایها به صورت ذهنی امکان‌پذیر است. به عنوان مثال، در مثال ۴ فقط به یک شکل می‌توان ضرایب x^2 ، x^2 ، x^2 و x را به دست آورد. ضرب x از $x(-3)$ و $x(2x) - 1$ ناشی می‌شود.

تقسیم

از آنجایی که تقسیم عمل وارون ضرب به شمار می‌رود، این امکان را به ما می‌دهد که تقسیم یک چند جمله‌ای را بر چند جمله‌ای دیگر توسط روشی طولانی و مشهور در حساب به انجام برسانیم. قبل از قصد به انجام این عمل، اهمیت دارد که: (۱) دو چند جمله‌ای بر حسب قوای نزولی مرتب شوند، (۲) برای توانهایی از x که دارای ضریب صفر می‌باشند، جای خالی قرار دهیم، یا نقطه چین بگذاریم.

برای رسیدن به این منظور، مثال زیر را که با مثال ۳ ارتباط دارد در نظر می‌گیریم.

مثال ۵:

عبارت $x^3 - x^2 - 3x^2 + 5x - 2$ را بر $x^2 + x - 2$ تقسیم کنید:

$$\begin{array}{r}
 x^3 - x^2 - 3x^2 + 5x - 2 \quad | \quad x^2 + x - 2 \\
 \underline{x^3 + x^2 - 2x^2} \\
 -2x^2 - x^2 + 5x \\
 \underline{-2x^2 - 2x^2 + 4x} \\
 4x^2 + x - 2 \\
 \underline{4x^2 + 4x - 8} \\
 -3x + 6
 \end{array}$$

با توجه به مثال ۳، می‌بایست این انتظار را داشته باشیم که، تقسیم کامل، خارج قسمت $x^3 - 2x + 1$ بوده و باقیمانده‌ای وجود نداشته باشد. هر جمله در خارج قسمت اولین جمله مقسوم علیه: (یعنی x^2)، و تقسیم هر جمله بر آن، به دست می‌آید.

این طرز کار، امکان استفاده از روش ضرایب جدا از هم، شبیه به آنچه در حالت ضرب انجام شد را به صورتی که در زیر نوشته شده است به ما می‌دهد:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{rrrrr}
 x^2 & x^2 & x^2 & x & 1 \\
 \hline
 & & 1 & -2 & 1 \\
 \hline
 1 & -1 & -3 & 5 & -2 \\
 1 & 1 & -2 & &
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{rrrr}
 & -1 & -1 & 5 \\
 & -2 & -2 & 4 \\
 \hline
 & 1 & 1 & -2 \\
 & 1 & 1 & -2 \\
 \hline
 & 0 & 0 & 0
 \end{array}
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{rrr}
 1 & 1 & -2
 \end{array} \right.$$

مثال ۶ :

عبارت $x^2 - 10$ را بر $x^2 + 3$ تقسیم کنید.

در این مثال واجب است صفرهایی برای توانهایی از x که دارای ضرایب صفر هستند

قرار دهیم. این کار به شکل زیر انجام می شود:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 x^2 + 0x^2 + 0x^2 + 0x - 10 \\
 x^2 + 0x^2 + 3x^0 \\
 \hline
 0x^2 - 3x^0 + 0x - 10 \\
 -3x^0 + 0x - 9 \\
 \hline
 -1
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{r}
 x^2 + 0x + 3 \\
 \hline
 x^2 + 0x - 3
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

عبارت $x^2 - 3$ خارج قسمت و -1 باقیمانده تقسیم است. بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$x^2 - 10 \equiv (x^2 - 3)(x^0 + 3) - 1$$

قضیه باقیمانده

هرگاه چند جمله ای $P(x)$ را بر چند جمله ای $\varphi(x)$ تقسیم کنیم، واضح است که $R(x)$ باقیمانده تقسیم می بایست دارای درجه ای کمتر از درجه $\varphi(x)$ باشد. (در صورتی که چنین نباشد تقسیم تمام نمی شود).

بویژه، اگر $P(x)$ از درجه n و بر $(x - \alpha)$ تقسیم شود، در این صورت $Q(x)$ خارج قسمت تقسیم از درجه $(n - 1)$ بوده و $R(x)$ باقیمانده تقسیم عددی ثابت خواهد بود. بنابراین:

$$P(x) \equiv (x - \alpha) Q(x) + R \quad (2.3)$$

اگر (در رابطه بالا) قرار دهیم؛ $x = \alpha$ ، در این صورت خواهیم دید که:

$$P(\alpha) = R \quad (2.4)$$

این نتیجه به ما این امکان را می دهد که باقیمانده تقسیم را بدون انجام عمل تقسیم بیابیم و این همان قضیه تقسیم است.

در صورتی که (به جای تقسیم $P(x)$ بر $(x - \alpha)$) این تقسیم را بر $(ax + b)$ در نظر بگیریم نتیجه ای تا حدودی کلی تر به دست می آید. بنابراین (خواهیم داشت):

$$P_1(x) = (ax + b) Q_1(x) + R_1 \quad (2.5)$$

$$\Rightarrow P_1\left(-\frac{b}{a}\right) = R_1 \quad (2.6)$$

(مقدار $-\frac{b}{a}$ از حل معادله $ax + b = 0$ حاصل شده است.)

مثال ۷:

باقیمانده تقسیم $P(x) \equiv 6x^2 - 7x + 12x - 8$ را بر (الف) $(x - 1)$ ، (ب) $(2x - 1)$ پیدا کنید:

$\rightarrow P(1) = 6 - 7 + 12 - 8 = 3$ باقیمانده عبارت است از (الف)

$\rightarrow P\left(\frac{1}{2}\right) = 6\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{1}{2}\right) + 12\left(\frac{1}{2}\right) - 8 = -3$ باقیمانده عبارت است از (ب)

قضیه فاکتور (تجزیه)

باتوجه به معادله (۲.۶) مشاهده می شود که اگر $P_1\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ ، در این صورت $R_1 = 0$.

\Leftarrow وقتی که $P_1(x)$ بر $(ax + b)$ بخش پذیر باشد باقیمانده ای وجود ندارد.

\Leftarrow $(ax + b)$ یک فاکتور یا عامل $P_1(x)$ می باشد.

این مطالب به قضیه فاکتور (تجزیه) معروف است.

با توجه به معادله (۲.۴) این نتیجه را مشاهده می‌کنیم که: «اگر $P(\alpha) = 0$ ،
در این صورت: $(x - \alpha)$ یک عامل یا فاکتور چندجمله‌ای $P(x)$ است.»

مثال ۸:

در صورتی که $P(x) \equiv 2x^2 - 6x + 9x - 27$ ، نشان دهید که $(x - 3)$ یک عامل $P(x)$ است:

$$P(3) = 2 \times 27 - 6 \times 9 + 9 \times 3 - 27 = 0.$$

بنابراین؛ $(x - 3)$ یک عامل $P(x)$ است.

مثال ۹:

در صورتی که $P(x) \equiv 6x^2 - x^2 - 19x - 6$ ، نشان دهید که $(3x + 1)$ یک عامل $P(x)$ است:

$$3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

بنابراین؛ ما $P(-\frac{1}{3})$ را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} P(-\frac{1}{3}) &= 6(-\frac{1}{3})^2 - (-\frac{1}{3})^2 - 19(-\frac{1}{3}) - 6 \\ &= -\frac{2}{9} - \frac{1}{9} + \frac{19}{3} - 6 = 0. \end{aligned}$$

پس؛ $(3x + 1)$ یک عامل $P(x)$ است.

مثال ۱۰:

هرگاه داشته باشیم؛ $P(x) \equiv x^2 - 3x + k$ ، معین کنید به ازای چه مقداری برای k ، $(x + 3)$ یک عامل $P(x)$ است.

اگر $(x + 3)$ یک عامل $P(x)$ باشد، $P(-3) = 0$.

$$P(-3) = 0 \Rightarrow 81 - 27 + k = 0 \Rightarrow k = -54$$

مثال ۱۱ :

هرگاه $P(x) \equiv ax^2 - bx + ax + 6$ ، با فرض این که $(x + 1)$ و $(x - 2)$ عاملهای $P(x)$ می باشند $P(x)$ بر $(x + 1)$ و $(x - 2)$ بخش پذیر است، عددهای ثابت a و b را پیدا کنید. چون: $(x + 1)$ عامل $P(x)$ است، $P(-1) = 0$.

$$\Rightarrow -a - b - a + 6 = 0 \Rightarrow -2a - b + 6 = 0. \quad (1)$$

چون: $(x - 2)$ عامل $P(x)$ است، $P(2) = 0$.

$$\Rightarrow 4a - 2b + 2a + 6 = 0 \Rightarrow 6a - 2b + 6 = 0. \quad (2)$$

(با توجه به معادلات (۱) و (۲) دستگاه معادلاتی تشکیل می شود که) از حل این دستگاه معادلات $a = 1$ و $b = 4$ ، به دست می آید.

تشخیص عاملهای چندجمله ایها

قضیه عامل (تجزیه) جهت تشخیص عاملهای چندجمله ایها کمک مهمی است. برای پیدا کردن عاملهای خطی، ما در جستجوی مقادیری برای λ هستیم به طوری که $P(\lambda)$ بر $(x - \lambda)$ بخش پذیر باشد. یکی از نتایج حاصل از قضیه عامل، معادل با تشخیص مقادیر λ است به طوری که $P(\lambda) = 0$.

اگر یک چندجمله ای به شکلی نوشته شود که همه ضرایب آن عددهای صحیح باشند، در این صورت پیشنهاد می شود مقادیری را برای λ در نظر بگیریم که عدد ثابت چندجمله ای یعنی a بر آنها بخش پذیر باشد.

مثال ۱۲ :

هرگاه

$$P(x) \equiv x^3 - 4x^2 + x + 6$$

در این صورت عاملهای $P(x)$ را پیدا کنید.

تنها عاملهای صحیح عدد ۶ عبارتند از :

$$\pm 6, \pm 3, \pm 2, \pm 1$$

بنابراین ما می بایست این مقادیر را برای λ در نظر بگیریم.

نتیجه	$P(\lambda)$	امتحان عامل $(x - \lambda)$
مخالف صفر، عامل نمی باشد.	$1 - 4 + 1 + 6 = 4$	$(1) (x - 1)$
$(x + 1)$ یک عامل است.	$-1 - 4 - 1 + 6 = 0$	$(2) (x + 1)$
$(x - 2)$ یک عامل است.	$8 - 16 + 2 + 6 = 0$	$(3) (x - 2)$
مخالف صفر، عامل نمی باشد.	$-8 - 16 - 2 + 6 = -10$	$(4) (x + 2)$
$(x - 3)$ یک عامل است.	$27 - 36 + 3 + 6 = 0$	$(5) (x - 3)$
مخالف صفر، عامل نمی باشد.	$-27 - 36 - 3 + 6 = -60$	$(6) (x + 3)$

عاملهای $P(x)$ عبارتند از: $(x + 1)$ ، $(x - 2)$ و $(x - 3)$ و تجزیه $P(x)$ به صورت $P(x) \equiv (x + 1)(x - 2)(x - 3)$ می باشد.

در مرحله (2) ، $(x + 1)$ به عنوان یک عامل $P(x)$ یافت می شود، پس قطعاً، می توانیم $P(x)$ را بر $(x + 1)$ تقسیم کنیم و خارج قسمت، عبارت درجه دوم $x^2 - 5x + 6$ خواهد بود، که بلافاصله به $(x - 2)(x - 3)$ تجزیه می شود.

همچنین در مرحله (3) ما یک عامل $(x - 2)(x + 1)$ را داشته و عامل باقیمانده می تواند از طریق تقسیم خارج شود یا با یک بررسی دقیق این کار صورت گیرد. البته، با توجه به این که ما سه عامل برای چندجمله ای درجه سوم $P(x)$ یافته ایم مرحله (5) لزومی ندارد. به عنوان مثال: ما، نیازی برای در نظر گرفتن $\lambda = \pm 6$ نداریم.

استفاده از عاملها

شرایط متعددی وجود دارد که توانایی نوشتن یک چندجمله ای مانند $P(x)$ را بر حسب عاملهایش، سودمند می سازد. این مطلب را با استفاده از چندجمله ای $P(x)$ که در مثال ۱۲ در نظر گرفته شده است، توضیح می دهیم. ما یافتیم که:

$$P(x) \equiv (x^3 - 4x^2 + x + 6) \equiv (x + 1)(x - 2)(x - 3)$$

حل معادلات

ابتدا مهمترین خاصیت عددها را یاد آور می شویم. «اگر حاصل ضرب دو یا چند عدد

چندجمله ایها و توابع گویا ۴۱

مساوی با صفر شود، در این صورت حداقل یکی از آنها می‌بایست صفر باشد. اگر بخواهیم معادله $P(x) = 0$ را حل کنیم؛ در این صورت، از عاملهای به دست آمده در بالا استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$P(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 3) = 0$$

با توجه به خاصیت فوق، داریم:

$$(x + 1) = 0 \quad \text{یا} \quad (x - 2) = 0 \quad \text{یا} \quad (x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 \quad \text{یا} \quad x = 2 \quad \text{یا} \quad x = 3$$

رسم منحنی

هرگاه یک منحنی دارای معادله $y = P(x)$ باشد، در این صورت محل برخورد آن با محور x ها از معادله $P(x) = 0$ حاصل می‌شود. پس؛ با توجه به مطالب فوق، منحنی محور x ها را در نقاط به طول $x = -1$ ، $x = 2$ و $x = 3$ قطع می‌کند. (برای رسم یک منحنی مختصات نقاط برخورد آن با محور x ها لازم است.)
این مطلب به تفصیل در کتاب رسم منحنیها، نوشته H. M. KenWood و C. Plumpton (از همین سری کتابها) مطرح شده است.
همچنین در رسم منحنی دانستن مختصات نقاط ساکن (نقاط ماکزیمم یا مینیمم) مفید است، و این نقاط از معادله $P'(x) = 0$ به دست می‌آیند. در مثال ما:

$$P'(x) = 3x^2 - 8x + 1$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 12}}{6}$$

$$= 2.045 \quad \text{یا} \quad 0.13$$

نقاط ساکن در کتاب دیفرانسیل، نوشته C.T. Moss و C. Plumpton (از همین سری کتابها) مطرح شده است.

(۱) $P'(x)$ ، مشتق $P(x)$ می‌باشد و ریشه‌های مشتق همان طولهای نقاط ساکن است.

حل نامعادلات

اگر $P(x)$ را به شکل زیر بر حسب عاملهای بنویسیم، حل نامعادله $P(x) > 0$ آسان است. در این صورت داریم:

$$(x+1)(x-2)(x-3) > 0$$

ضرب این عددها فقط زمانی مثبت است که هریک از آنها مثبت یا دوتای آنها منفی و یکی مثبت باشد. این وضعیت در فصل ۶ همین کتاب به تفصیل مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است.

۲.۲ توابع گویا و کسرهای جزئی^(۱)

یک تابع جبری گویا تابعی است، چون $f: x \rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)}$ ، به طوری که $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله‌ای‌هایی بوده و $Q(x)$ چند جمله‌ای صفر نباشد. کلیه مقادیری که به ازای آنها مخرج کسر یعنی $Q(x)$ صفر می‌شود می‌بایست از دامنه حذف شوند. می‌توان نوشت:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

به طوری که در آن m و n عددهای صحیح و a_i ها و b_i ها مقادیر ثابتی هستند. اگر درجه $P(x)$ کمتر از درجه $Q(x)$ باشد یعنی $n < m$ ، در این صورت $f(x)$ یک شکل جبری محض خوانده می‌شود.

برای جمع کردن دو چند جمله‌ای گویا با هم، کوچکترین مضرب مشترک (LCM) مخرجها را پیدا کرده و معادل هر کسر را با توجه به کوچکترین مضرب مشترک مخرجها بیان می‌کنیم. برای مثال:

(۱) کسرهایی به صورت $\frac{A}{(x-a)^n}$ (n عددی طبیعی است)، یا $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)}$ مشروط بر آن که عبارت x^2+px+q به عوامل خطی حقیقی تجزیه نشود.

$$f(x) \equiv \frac{5}{x+2} - \frac{4}{x+3} \equiv \frac{5(x+3) - 4(x+2)}{(x+2)(x+3)} \equiv \frac{x+7}{(x+2)(x+3)}$$

در بسیاری مسائل ریاضی لازم است از عکس این روش (روش بالا) استفاده شود و توابع گویای پیچیده را به صورت جمع چند تابع جبری محض ساده نشان دهیم. این روش وارون بیان $f(x)$ بر حسب کسرهای جزئی خودش نامیده می شود. این روش برای بیان یک تابع جبری گویا مانند: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ، به صورت کسرهای جزئی به شکل زیر می تواند خلاصه شود.

مرحله ۱- اگر درجه $P(x)$ بزرگتر یا مساوی با درجه $Q(x)$ باشد، $P(x)$ را بر $Q(x)$ تقسیم کرده و خواهیم داشت:

$$P(x) = Q(x) S(x) + R(x)$$

در این صورت:

$$f(x) = S(x) + f_1(x) \text{ و } f_1(x) = \frac{R(x)}{Q(x)}$$

که $f_1(x)$ یک شکل جبری محض است.

مرحله ۲- حالتی را در نظر می گیریم که $f(x)$ یک شکل جبری محض، یا $f_1(x)$ مانند بالا تعریف شده باشد.

در این مرحله، مخرج کسر را به عوامل حقیقی خطی و درجه دو تجزیه می کنیم (این عمل همیشه امکان پذیر است).

(۱) برای هر عامل خطی مانند $(ax + b)$ ، یک کسر جزئی به شکل $\frac{A}{(ax + b)}$ ، فرض می کنیم که در این کسر A مقداری ثابت است.

(۲) برای کلیه عوامل مکرر به شکل $(ax + b)^r$ ، r کسر جزئی به صورت زیر فرض می کنیم:

$$\frac{A_1}{(ax + b)}, \frac{A_2}{(ax + b)^2}, \dots, \frac{A_r}{(ax + b)^r}$$

که A_1 و A_2 و ... و A_r مقادیری ثابت هستند.

(۳) برای هر عامل درجه دوم به شکل $px^2 + qx + r$ یک کسر جزئی به صورت زیر فرض می کنیم:

$$\frac{\alpha x + \beta}{px^2 + qx + r}$$

که α و β مقادیر ثابتی هستند. در این قسمت ما روی عوامل درجه دوم مضاعف بحثی نمی‌کنیم (باتوجه به موارد ۱ و ۲).

مثال ۱۳ :

کسر $\frac{x+7}{(x+2)(x+3)}$ را به صورت کسره‌های جزئی نمایش دهید. فرض کنیم؛

$$f(x) \equiv \frac{x+7}{(x+2)(x+3)} \equiv \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

$$\Rightarrow (x+7) \equiv A(x+3) + B(x+2) \quad (2.7)$$

$$\Rightarrow (x+7) \equiv (A+B)x + (3A+2B)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ 3A+2B=7 \end{cases} \Rightarrow A=5 \text{ و } B=-4$$

$$\Rightarrow \frac{x+7}{(x+2)(x+3)} \equiv \frac{5}{(x+2)} - \frac{4}{(x+3)}$$

یک روش دیگر برای به دست آوردن A و B ، استفاده از این واقعیت است که معادله (۲.۷) یک اتحاد است و هر مقدار x در آن صدق می‌کند. اگر قرار دهیم $x = -2$ ؛ خواهیم داشت:

$$-2+7 = A(-2+3) \Rightarrow A=5$$

اگر قرار دهیم؛ $x = -3$ ، خواهیم داشت:

$$-3+7 = B(-3+2) \Rightarrow B=-4$$

روش دوم غالباً به عنوان «روش پوشایی» معروف است و می‌تواند به صورتی کاملاً کلی مطرح شود.
اگر:

$$\frac{g(x)}{(ax+b)(cx+d)} \equiv \frac{\gamma}{(ax+b)} + \frac{\delta}{(cx+d)}$$

که در آن $g(x)$ تابعی خطی بر حسب x است و γ و δ عددهایی ثابت هستند؛ در این صورت

$$\frac{g(x)}{(cx + d)} = \gamma + \frac{\delta(ax + b)}{(cx + d)}$$

با جایگذاری $x = \frac{-b}{a}$ نتیجه می شود:

$$\gamma = \frac{g(-b/a)}{(-cb/a + d)}$$

این نشان می دهد که ضریب $(ax + b)^{-1}$ در بسط کسر جزئی می تواند با «پوشاندن» عامل $ax + b$ در عبارت اصلی و قراردادن $x = \frac{-b}{a}$ در عبارتی که باقی می ماند، به دست آید. به بیان دقیقتر، با ضرب کردن در $ax + b$ و قراردادن $x = \frac{-b}{a}$ نباید هیچ گونه نتیجه درستی را استنتاج کنیم. اما، با استفاده از فرآیندی حدی، می توان محقق کرد که نتایجی که به این طریق به دست می آیند، در واقع صحیح هستند. البته شخص می تواند ترکیبی از هر دو روش را به کار گیرد و این مطلب را در مثال زیر توضیح خواهیم داد.

مثال ۱۴ :

$$\text{کسر } \frac{2x^2 + 9x + 7}{(x^2 + 4)(2x - 3)} \text{ را به صورت کسرهای جزئی نمایش دهید.}$$

از مراحل (۱) و (۳) در بالا استفاده می کنیم، می نویسیم:

$$\frac{2x^2 + 9x + 7}{(x^2 + 4)(2x - 3)} \equiv \frac{Ax + B}{(x^2 + 4)} + \frac{C}{(2x - 3)}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 9x + 7 \equiv (Ax + B)(2x - 3) + C(x^2 + 4) \quad (2.8)$$

اگر در معادله (۲.۸) قرار دهیم $x = \frac{3}{2}$ ؛ خواهیم داشت:

$$\frac{9}{2} + \frac{27}{2} + 7 = C\left(\frac{9}{4} + 4\right) \Rightarrow 25 = \frac{25}{4}C \Rightarrow C = 4$$

از متحد قرار دادن ضریب x^2 داریم:

$$2 = 2A + C \Rightarrow 2 = 2A + 4 \Rightarrow A = -1$$

و از متحد قرار دادن ثابتها داریم:

$$7 = -3B + 4C \Rightarrow 7 = -3B + 16 \Rightarrow B = 3$$

(بهتر است مقادیر به دست آمده را در معادله (۲.۸) قرار داده و صدق این مقادیر را امتحان کنیم.) بنابراین نتیجه حاصل به صورت زیر می باشد:

$$\frac{2x^2 + 9x + 7}{(x^2 + 4)(2x - 3)} \equiv \frac{(-x + 3)}{(x^2 + 4)} + \frac{4}{(2x - 3)}$$

مثال ۱۵ :

$$\text{کسر } \frac{2x(5-x)}{(x-1)^2(x+3)} \text{ را به صورت کسرهایی جزئی نمایش دهید.}$$

از مراحل (۱) و (۲) استفاده می کنیم، می نویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{2x(5-x)}{(x-1)^2(x+3)} &\equiv \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x+3)} \\ \Rightarrow 10x - 2x^2 &\equiv A(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)^2 \quad (2.9) \end{aligned}$$

با جانشینی $x = 1$ در معادله فوق خواهیم داشت:

$$8 = 4A \Rightarrow A = 2$$

و با جانشینی $x = -3$ خواهیم داشت:

$$-48 = 16C \Rightarrow C = -3$$

با متحد قرار دادن ضرایب x^2 داریم:

$$-2 = B + C \Rightarrow -2 = B - 3 \Rightarrow B = 1$$

واضح است، این مقادیر در معادله (۲.۹) صدق می کنند و نتیجه نهایی به صورت زیر می باشد:

$$\frac{2x(5-x)}{(x-1)^2(x+3)} \equiv \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)} - \frac{3}{(x+3)}$$

مثال ۱۶ :

کسر $\frac{x^2 + 8x + 9}{(x+1)(x+2)}$ را به صورت مجموع یک چندجمله‌ای و کسرهای جزئی

نمایش دهید.

با توجه به این که، $x^2 + 8x + 9 \equiv x^2 + 3x + 2 + (5x + 7)$ در این صورت، صورت کسر را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم.

$$x^2 + 8x + 9 \equiv 1(x^2 + 3x + 2) + (5x + 7)$$

بنابراین :

$$\frac{x^2 + 8x + 9}{(x+1)(x+2)} \equiv 1 + \frac{5x + 7}{(x+1)(x+2)} \quad (2.10)$$

حال در معادله (۲.۱۰) کسر $\frac{5x + 7}{(x+1)(x+2)}$ را به صورت کسرهای جزئی می‌نویسیم:

$$\frac{5x + 7}{(x+1)(x+2)} \equiv \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+2)}$$

$$\Rightarrow 5x + 7 \equiv A(x+2) + B(x+1)$$

حال اگر قرار دهیم؛ $x = -1$ خواهیم داشت: $A = 2$ و اگر قرار دهیم؛ $x = -2$ خواهیم داشت: $B = 3$ بنابراین نتیجه حاصل به شکل زیر است:

$$\frac{x^2 + 8x + 9}{(x+1)(x+2)} \equiv 1 + \frac{2}{(x+1)} + \frac{3}{(x+2)}$$

تمرین ۲ :

۱- عبارتهای $3x^2 + 2x + 6$ ، $x^2 + x + 1$ و $x^2 + 2x + 3$ را باهم جمع کنید.

۲- عبارت $x^2 + 2x^2 - 3x + 1$ را از $5x^2 + 8x + 5$ کم کنید.

۳- عبارتهای $(x^2 + 2x + 1)$ و $(x^2 + x + 1)$ را از دو روش پله‌ای و معمولی درهم

ضرب کنید.

۴- عبارت $x^2 + 5x^2 + 11x + 10$ را بر $(x + 2)$ تقسیم کنید.

۵- خارج قسمت و باقیمانده تقسیم $x^2 + 3x^2 + 2x$ بر $x^2 - x + 1$ را به دست آورید.

۶- الف) باقیمانده تقسیم $x^2 + 2x^2 + x + 1$ را بر $(x + 1)$ و ب) باقیمانده

تقسیم $x^2 + 2x^2 + 3x^2 + x + 1$ را بر $(2x - 1)$ به دست آورید.

۷- باقیمانده تقسیم $f(x) \equiv x^2 + ax^2 + bx + c$ بر $(x - 1)$ ، $(x + 1)$ و $(x - 2)$

به ترتیب برابر است با ۷ و ۱ و ۱۹. مقادیر a و b و c را یافته و باقیمانده تقسیم $f(x)$ را بر $(x + 2)$ معین کنید.

۸- نشان دهید؛ $(x + 3)$ یک عامل $x^2 + 2x^2 + 7x^2 + 11x - 57$ است.

۹- اگر $(x - 1)$ و $(x + 2)$ هر دو عاملهای $ax^2 + 3x^2 + bx - 2$ باشند، مقادیر a و b

را یافته و عامل سوم را نیز پیدا کنید.

۱۰- الف) نشان دهید؛ $(x - c)$ یک عامل $x^2 - c^2$ است و سپس نشان دهید؛

$$x^2 - c^2 \equiv (x - c)(x^2 + cx + c^2)$$

ب) نشان دهید؛ $(x + c)$ یک عامل $x^2 + c^2$ بوده و سپس نشان دهید؛

$$x^2 + c^2 \equiv (x + c)(x^2 - cx + c^2)$$

۱۱- با استفاده از قضیه عامل یک عامل $x^2 - x^2 + 2x - 8$ را یافته و سپس عبارت

فوق را تجزیه کنید.

۱۲- عاملهای عبارت $3x^2 + 5x^2 - 16x - 12$ را بیابید.

۱۳- کسرهایی زیر را به صورت یک کسر گویا بیان کنید:

$$\text{الف) } \frac{2}{(x^2 + x + 2)} - \frac{3}{(x + 3)} \quad \text{ب) } \frac{2}{(x - 2)} + \frac{3}{(x + 3)}$$

۱۴- کسرهایی زیر را به شکل کسرهایی جزئی تجزیه کنید:

$$\text{الف) } \frac{2x + 2}{(x - 1)(x + 3)} \quad \text{ب) } \frac{3x^2 - 2}{(x + 1)(x^2 + x + 1)} \quad \text{ج) } \frac{7x + 4}{(x - 3)(x + 2)^2}$$

(جوابهای خود را با ترکیب کسرهایی جزئی امتحان کنید.)

۱۵- عبارت $\frac{x^2 - 4x + 5}{(x - 2)(x + 3)}$ را به صورت حاصل جمع یک چند جمله ای با کسرهایی

جزئی بیان کنید.

توابع درجه دوم و معادلات درجه دوم

۳.۱ توابع درجه دوم

تابع $f(x) \equiv ax^2 + bx + c$ که در آن a و b و c مقادیر ثابت و $a \neq 0$ ، یک تابع درجه دوم، یا بعضی اوقات یک چندجمله‌ای درجه دوم نامیده می‌شود. حال با توجه به اتحاد $(x + d)^2 = x^2 + 2dx + d^2$ و استفاده از آن، می‌توانیم بنویسیم:

$$ax^2 + bx + c \equiv a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \equiv a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right]$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c \equiv a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \quad (3.1)$$

تابع درجه دوم $f(x)$ دارای خواص زیر می‌باشد:

$$f(0) = c \quad (1)$$

(۲) در حالتی که $x \rightarrow \pm\infty$ ؛ اگر $a > 0$ آنگاه $f(x) \rightarrow +\infty$

اگر $a < 0$ آنگاه $f(x) \rightarrow -\infty$

(۳) با توجه به رابطه (۳.۱) اگر $a > 0$ واضح است که $f(x) \geq \frac{(4ac - b^2)}{4a}$

در این حالت کمترین مقدار عبارت $\frac{(4ac - b^2)}{4a}$ به ازای $x = \frac{-b}{2a}$ به دست می‌آید.

اگر $a < 0$ در این صورت؛ $f(x) \leq \frac{4ac - b^2}{4a}$. در این حالت بیشترین مقدار عبارت

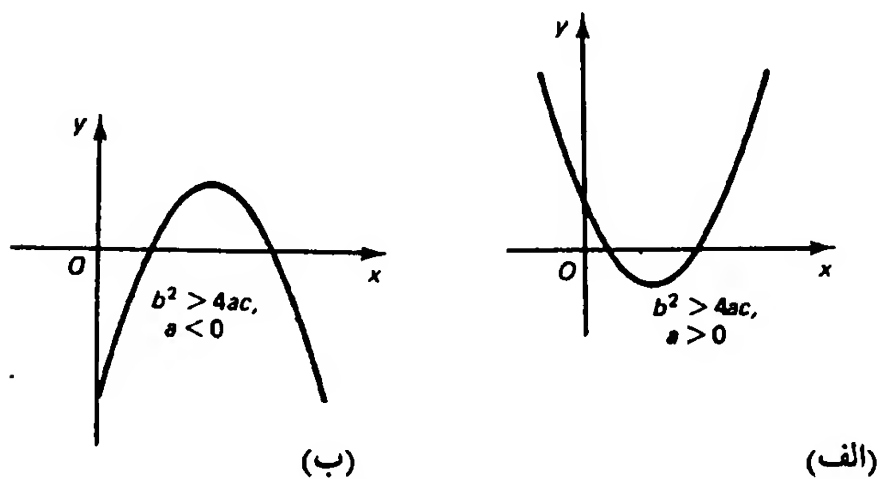
$$\frac{(4ac - b^2)}{4a} \text{ به ازای } x = \frac{-b}{2a} \text{ حاصل می‌شود.}$$

(۴) اگر $f(x) = 0$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] &= 0 \\
 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right) &= \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
 \Rightarrow x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

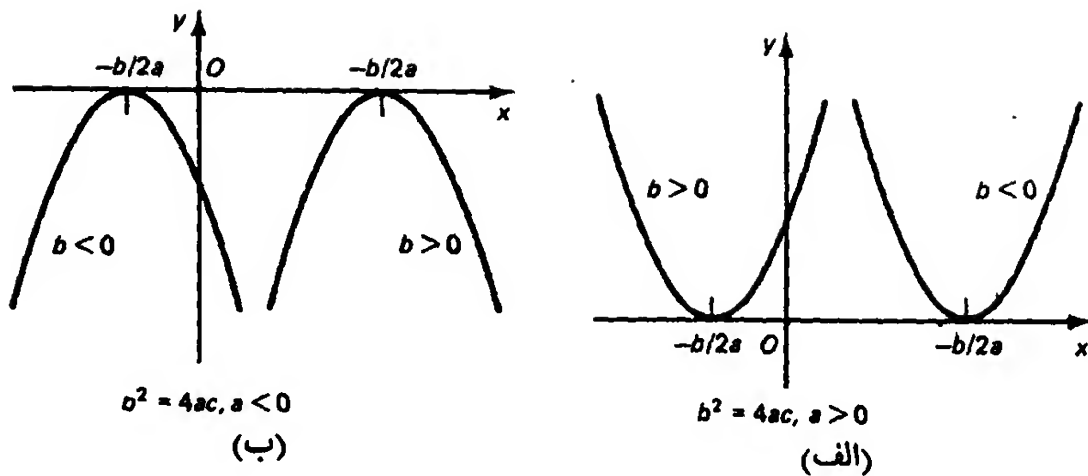
این نتیجه یک تعبیر نموداری مهم در بر دارد. با توجه به مبین عبارت فوق یعنی $\Delta = b^2 - 4ac$ که مثبت، منفی یا صفر باشد، ۳ حالت وجود دارد.

(۱) اگر $b^2 > 4ac$ ($\Delta > 0$)، منحنی $y = f(x)$ محور x ها را در دو نقطه متمایز قطع می‌کند. در این وضعیت و با توجه به قسمت (۲) اگر $a > 0$ آنگاه $f(x) \rightarrow +\infty$ و اگر $a < 0$ آنگاه $f(x) \rightarrow -\infty$ برای رسم منحنی $y = f(x)$ دو حالت ممکن حاصل می‌شود که در شکل ۳.۱ مشاهده می‌کنید.



شکل ۳.۱

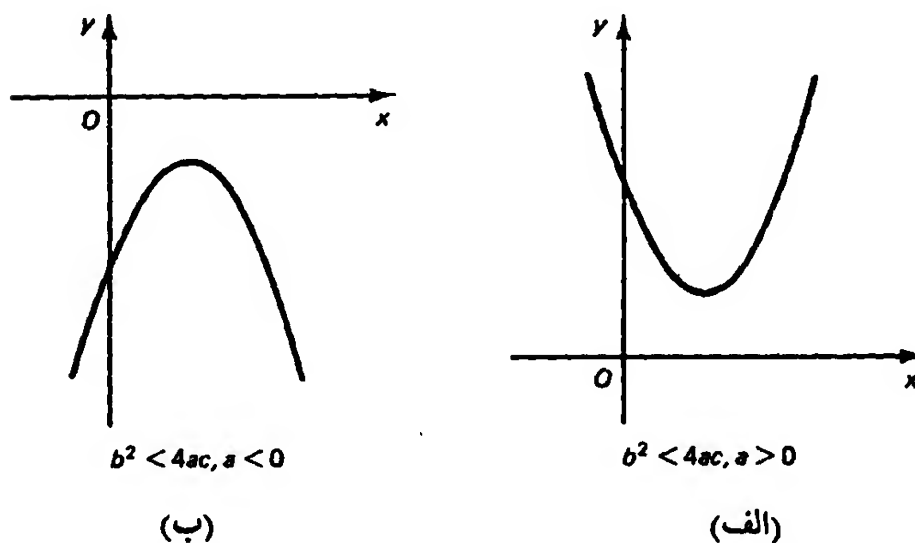
(۲) اگر $b^2 = 4ac$ ($\Delta = 0$)، منحنی $y = f(x)$ بر محور x ها مماس است، در این حالت معادله $f(x) = 0$ دارای دو ریشه مساوی با هم در $x = \frac{-b}{2a}$ خواهد بود.



شکل ۳.۲

(۳) اگر $b^2 < 4ac$ ، معادله $f(x) = 0$ ریشه حقیقی نخواهد داشت.
 توضیح: دیدیم که اگر $\Delta < 0$ معادله $f(x) = 0$ ریشه حقیقی ندارد. در این وضعیت
 همواره دو ریشه مختلط موجود است. اگر تعریف کنیم $i^2 = -1$ ؛ در این صورت، با توجه به
 فرمول (۳.۲) داریم:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(-1)(4ac - b^2)}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm i \frac{\sqrt{(4ac - b^2)}}{2a}$$



شکل ۳.۳

۳.۲ معادلات درجه دوم

معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ، زمانی که $a \neq 0$ ، یک معادله درجه دوم نامیده می‌شود. با توجه به معادله (۳.۲) ریشه‌های این معادله درجه دوم عبارتند از:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (۳.۳)$$

اگر ما این ریشه‌ها را با α و β نمایش دهیم؛ در این صورت داریم:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta) \quad (۳.۴)$$

با توجه به رابطه (۳.۳)، یا با متحد قرار دادن ضرایب x^1 و x^0 در معادله (۳.۴)، خواهیم داشت:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad (\text{الف } ۳.۵)$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \quad (\text{ب } ۳.۵)$$

بلافاصله از رابطه (ب ۳.۵) نتیجه می‌گیریم که اگر a و c هم علامت باشند ($\frac{c}{a} > 0$)، دو ریشه (α و β) متحد‌العلامه‌اند. از رابطه (الف ۳.۵) نتیجه می‌گیریم که علامت آنها مخالف علامت b می‌باشد. اگر a و c مختلف‌العلامه باشند، ریشه‌ها نیز مختلف‌العلامه خواهند بود. تجزیه و تحلیل فوق در زیر نمایش داده شده است:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = 0 \end{array} \right. \rightarrow \begin{cases} \text{ریشه حقیقی متمایز} & (\Delta > 0) \\ \text{ریشه حقیقی برابر} & (\Delta = 0) \\ \text{ریشه حقیقی ندارد} & (\Delta < 0) \end{cases}$$

برای حل یک معادله درجه ۲ حتماً لازم نیست از فرمول عمومی (۳.۳) استفاده شود. در حالت‌های ساده، زمانی که ریشه‌ها صحیح یا گویا هستند، می‌توان معادله درجه دوم را برحسب عامل‌هایش بیان کرد (به معادله (۳.۴) توجه کنید) و ریشه‌ها یعنی α و β برآسانی حاصل می‌شوند. اگر تجزیه بلافاصله انجام پذیر نبود، سعی می‌کنیم از قضیه عامل (صفحه ۳۸) برای به دست آوردن یک عامل، استفاده کنیم.

مثال ۱ :

قسمتهای مهم را به اشکال منحنیهای داده شده را توصیف کرده و نمودار آنها را رسم کنید:

الف) $f_1(x) = x^2 - 3x + 5$

ب) $f_2(x) = x^2 - 5x + 6$

ج) $f_3(x) = -x^2 + 2x - 1$

الف) $f_1(x) = x^2 - 3x + 5$

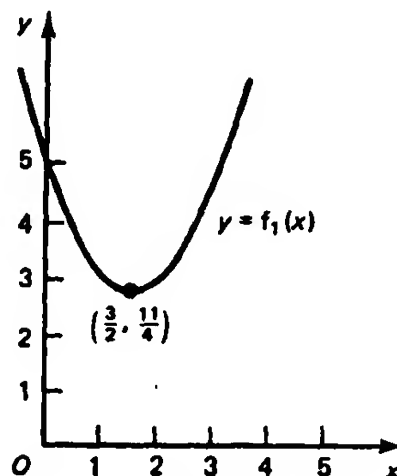
(۱) $f_1(0) = 5$

(۲) اگر $x \rightarrow \pm\infty$, $f_1(x) \rightarrow +\infty$

(۳) $f_1(x) = x^2 - 3x + 5 \equiv \left[x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right] - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 5$

$\equiv \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4}$

بنابراین $f_1(x)$ دارای کمترین مقدار خود به ازای $x = \frac{3}{2}$ بوده و مقدار آن برابر $\frac{11}{4}$ است، پس هیچگاه صفر نیست. نمودار $f_1(x)$ در زیر نمایش داده شده است.



شکل ۳.۴

$$\text{ب) } f_r(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$(۱) f_r(0) = 6$$

$$(۲) \text{ اگر } x \rightarrow \pm\infty, f_r(x) \rightarrow +\infty$$

$$\begin{aligned} (۳) f_r(x) = x^2 - 5x + 6 &\equiv \left[x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \right] - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 \\ &\equiv \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

بنابراین $f_r(x)$ کمترین مقدار خود را به ازای $x = \frac{5}{2}$ ، که مساوی با $-\frac{1}{4}$ می باشد به دست می آورد.

$$(۴) f_r(x) = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

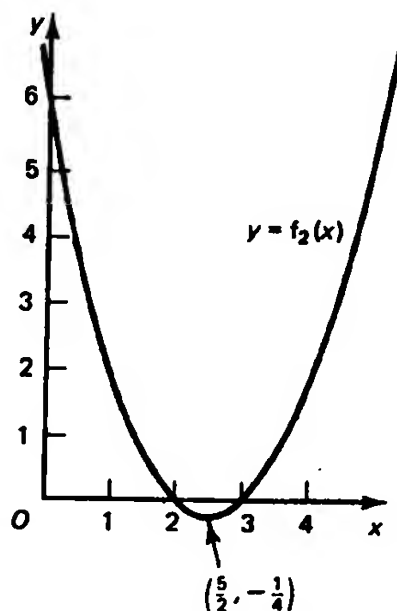
$$\Rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right) = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = 2$$

به روش دیگری ما می توانستیم $f_r(x)$ را به صورت زیر تجزیه کنیم و بنویسیم:

$$f_r(x) = (x - 3)(x - 2)$$

$$\Rightarrow f_r(x) = 0 \text{ که } x = 0 \text{ یا } x = 2$$

نمودار $f_r(x)$ در شکل ۳.۵ نمایش داده شده است.



شکل ۳.۵

$$\text{ج) } f_r(x) = -x^2 + 2x - 1$$

$$(۱) f_r(۰) = -۱$$

$$(۲) \text{ اگر } x \rightarrow \pm\infty, f_r(x) \rightarrow -\infty$$

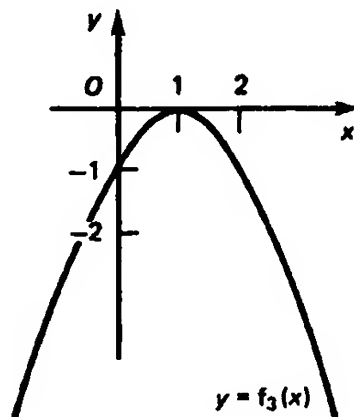
$$\begin{aligned} (۳) f_r(x) &= -x^2 + 2x - 1 \equiv -(x^2 - 2x) - 1 \\ &\equiv -(x^2 - 2x + 1) + 1 - 1 \\ &\equiv -(x - 1)^2 \end{aligned}$$

بنابراین $f_r(x)$ بیشترین مقدار خود یعنی ۰ را به ازای $x = 1$ می‌پذیرد.

$$(۴) f_r(x) = 0 \Rightarrow -(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ ریشه مضاعف } ۱$$

نمودار $f_r(x)$ در شکل ۳.۶ نمایش داده شده است.



شکل ۳.۶

مثال ۲ :

در صورتی که $f_1(x)$ ، $f_r(x)$ و $f_r(x)$ همان توابع در مثال ۱ باشند و تعریف کنیم:

$$g_1(x) = \frac{1}{[f_1(x)]}, \quad g_r(x) = \frac{1}{[f_r(x)]}, \quad g_r(x) = \frac{1}{[f_r(x)]}$$

قسمتهای مهم (نقاط حساس) اشکال $g_1(x)$ ، $g_r(x)$ ، $g_r(x)$ را توصیف کرده و نمودار هریک از آنها را رسم کنید:

$$\text{الف) } g_1(x) = \frac{1}{f_1(x)} = \frac{1}{x^2 - 3x + 5}$$

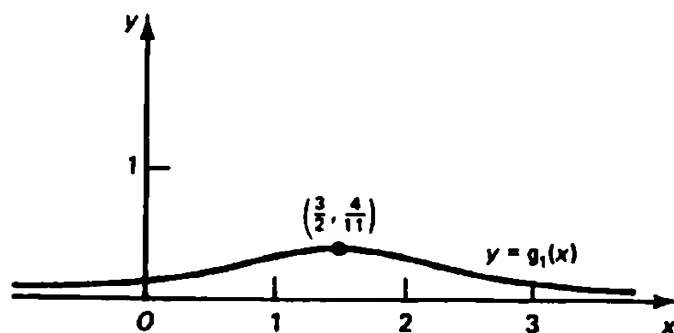
$$(۱) g_1(0) = \frac{1}{5}$$

(۲) اگر $x \rightarrow \pm\infty$ ، $g_1(x) \rightarrow 0$ (از بالا میل می‌کند)

(۳) کمترین مقدار برای $f_1(x)$ ، $\frac{11}{4}$ است و این مقدار در نقطه $x = \frac{3}{2}$ به دست می‌آید،

بنابراین بیشترین مقدار $g_1(x)$ ، $\frac{4}{11}$ است که در همان $x = \frac{3}{2}$ حاصل می‌شود. به علاوه، از

این که $f_1(x)$ هیچ‌گاه صفر نمی‌شود، نتیجه می‌گیریم که $g_1(x)$ ، همیشه متناهی باقی می‌ماند. نمودار $g_1(x)$ در شکل ۳.۷، نمایش داده شده است.



شکل ۳.۷

$$\text{ب) } g_2(x) = \frac{1}{f_2(x)} = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$$

$$(۱) g_2(0) = \frac{1}{6}$$

(۲) اگر $x \rightarrow \pm\infty$ ، $g_2(x) \rightarrow 0$ (از بالا میل می‌کند)

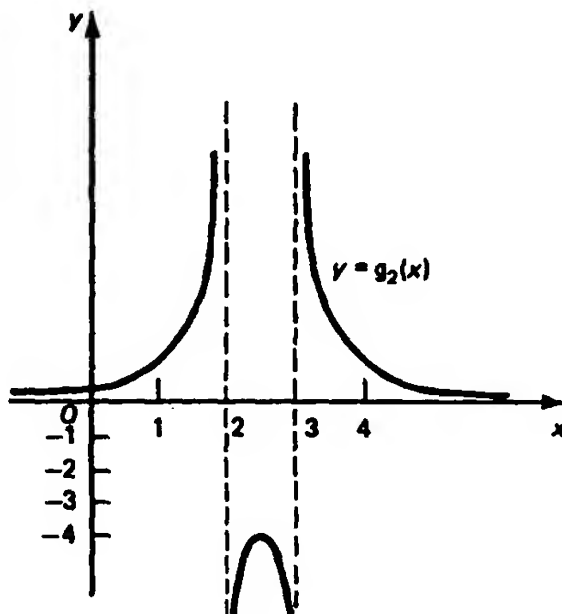
(۳) از آنجایی که $f_2(x)$ در نقطه $x = \frac{5}{2}$ دارای یک می‌نیم موضعی برابر $-\frac{1}{4}$ بود،

$g_2(x)$ دارای یک ماکزیمم موضعی در نقطه $x = \frac{5}{2}$ و برابر با -4 می‌باشد.

(۴) از آنجایی که در نقاط $x = 2$ و $x = 3$ ، $f_2(x) = 0$ است، نمودار $g_2(x)$ دارای

مجانبهای $x = 2$ و $x = 3$ می باشد.

به علاوه، اگر $x > 3$ یا $x < 2$ در این صورت $f_r(x) > 0$ ، بنابراین نتیجه می گیریم که اگر $x > 3$ یا $x < 2$ در این صورت $g_r(x) > 0$ و اگر $2 < x < 3$ آنگاه $f_r(x) < 0$ که در این حالت نتیجه می گیریم؛ اگر $2 < x < 3$ آنگاه $g_r(x) < 0$. نمودار $g_r(x)$ در شکل ۳.۸ نمایش داده شده است.



شکل ۳.۸

$$\text{ج) } g_r(x) = \frac{1}{f_r(x)} = \frac{1}{-x^2 + 2x - 1}$$

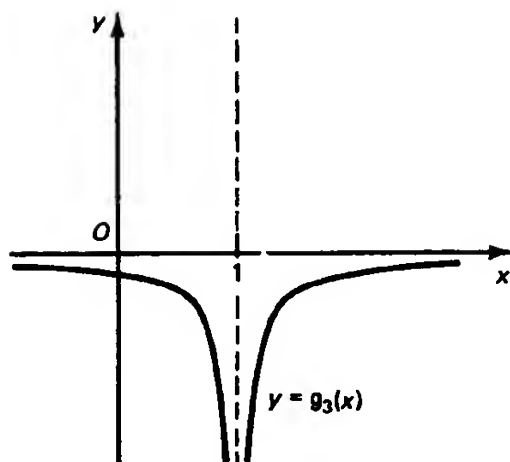
$$(۱) g_r(0) = -1$$

(از پایین میل می کند) $g_r(x) \rightarrow 0$ ، $x \rightarrow \pm\infty$ اگر x

(۳) از آنجایی که در $x = 1$ ، $f_r(x) = 0$ است، نمودار $g_r(x)$ دارای یک مجانب به معادله $x = 1$ می باشد.

به علاوه، اگر $f_r(x) < 0$ ($x \neq 1$) آنگاه برای هر $x \neq 1$ ، $g_r(x) < 0$.

نمودار $g_3(x)$ در شکل ۳.۹ نمایش داده شده است.



شکل ۳.۹

مثال ۳ :

مجموعه جواب هریک از نامعادلات زیر را پیدا کنید:

الف) $x^2 > 5x - 6$,

ب) $x^2 + 5 < 4x$,

ج) $3x^2 + x < 2$

الف) فرض کنیم $f(x) \equiv x^2 - 5x + 6$ ، بنابراین:

$$x^2 > 5x - 6 \iff f(x) > 0$$

ما قبلاً نمودار $f(x)$ را در شکل ۳.۵ رسم کرده ایم، با توجه به آن واضح است که اگر $x > 3$ یا

$x < 2$ آنگاه $f(x) > 0$. بنابراین، مجموعه جواب به صورت زیر ایجاب می شود:

$$\{x : x < 2\} \cup \{x : x > 3\}$$

ب) فرض کنیم $g(x) \equiv x^2 - 4x + 5$ ، بنابراین:

$$x^2 + 5 < 4x \iff g(x) < 0$$

به هر حال (می توان نوشت):

$$g(x) \equiv (x - 2)^2 + 1$$

واضح است که $g(x)$ به ازای $x = 2$ ، دارای کمترین مقدار خود یعنی ۱ است.

بنابراین: $g(x)$ هیچ گاه کوچکتر از صفر نمی باشد و هیچ x ی حقیقی وجود ندارد که

$$.x^7 + 5 < 4x$$

ج) فرض کنیم $h(x) \equiv 3x^7 + x - 2$ ، بنابراین:

$$3x^7 + x < 2 \Leftrightarrow h(x) < 0.$$

$$\begin{aligned} h(x) &\equiv 3 \left[x^7 + \frac{x}{3} - \frac{2}{3} \right] \equiv 3 \left[\left(x + \frac{1}{6}\right)^7 - \frac{1}{36} - \frac{2}{3} \right] \\ &\equiv 3 \left[\left(x + \frac{1}{6}\right)^7 - \frac{25}{36} \right] \end{aligned}$$

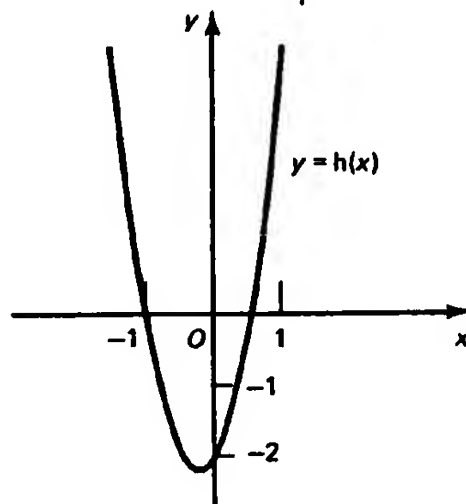
$$h(x) = 0 \Rightarrow x + \frac{1}{6} = \pm \frac{5}{6} \Rightarrow x = -1 \text{ یا } x = \frac{2}{3}$$

به علاوه، اگر $x \rightarrow \pm\infty$ ، $h(x) \rightarrow \infty$ و $h(0) = -2$.

نمودار $h(x)$ در شکل ۳.۱۰ نشان داده شده است. با توجه به نمودار مشاهده می شود که

برای $-1 < x < \frac{2}{3}$ ، $h(x) < 0$ ، یعنی مجموعه جواب عبارت است از:

$$\{x : -1 < x < \frac{2}{3}\}$$



شکل ۳.۱۰

مثال ۴:

معادلات درجه ۲ را در زیر به ازای مقادیر حقیقی x ، حل کنید:

الف) $3x^2 + 4x - 3 = 0$ ،

ب) $4x^2 - 28x + 49 = 0$ ،

ج) $x^2 - x + 1 = 0$.

الف) $3x^2 + 4x - 3 = 0$ ، در این جا داریم: $a = 3$ و $b = 4$ و $c = -3$. با استفاده از فرمول خواهیم داشت:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 3 \times (-3)}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{52}}{6} \approx \frac{-4 \pm \sqrt{211}}{6}$$

$$\approx \frac{3/211}{6} \text{ یا } \frac{-11/211}{6} \Rightarrow x = 0.535 \text{ یا } x = -1.869$$

ب) $4x^2 - 28x + 49 = 0$ ، در این جا داریم: $a = 4$ ، $b = -28$ و $c = 49$. بنابراین:

$$x = \frac{28 \pm \sqrt{(-28)^2 - 4 \times 4 \times 49}}{8} = \frac{28 \pm 0}{8} \Rightarrow x = 3.5$$

(ریشه مضاعف)

به روشی دیگر می توانیم بنویسیم: $4x^2 - 28x + 49 \equiv (2x - 7)^2$ ، که بلافاصله جوابی مشابه با قبل به ما می دهد.

ج) $x^2 - x + 1 = 0$ ، در این جا داریم: $a = 1$ ، $b = -1$ ، $c = 1$. بنابراین:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \Rightarrow \text{معادله } x^2 - x + 1 = 0 \text{ ریشه های حقیقی ندارد}$$

مثال ۵:

اگر α و β ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، مقادیر زیر را پیدا کنید:

الف) $\alpha^2 + \beta^2$

ب) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

ج) $\alpha^2 + \beta^2$

الف) یادآوری می کنیم که $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ و $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ بنابراین ما می کوشیم که

$\alpha^2 + \beta^2$ را بر حسب $(\alpha + \beta)$ و $(\alpha\beta)$ بنویسیم.

در واقع داریم:

$$\text{الف)} \alpha^r + \beta^r = [(\alpha + \beta)^r - r\alpha\beta] = \frac{b^r}{a^r} - r\frac{c}{a} = \frac{b^r - rac}{a^r}$$

$$\text{ب)} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \equiv \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \left(\frac{-b/a}{c/a} \right) = \frac{-b}{c}$$

$$\text{ج)} \alpha^r + \beta^r \equiv (\alpha + \beta) (\alpha^r - \alpha\beta + \beta^r) \equiv (\alpha + \beta) [(\alpha + \beta)^r - rac]$$

$$= \left(\frac{-b}{a} \right) \left[\frac{b^r}{a^r} - r\frac{c}{a} \right] = \frac{b(rac - b^r)}{a^r}$$

مثال ۶:

اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، معادله‌ای تشکیل دهید که

ریشه‌های آن $\frac{\alpha}{\beta}$ و $\frac{\beta}{\alpha}$ باشند.

از آنجایی که شکل کلی معادله به صورت زیر است:

$$0 = (x + (\text{حاصل ضرب ریشه‌ها})) (x - (\text{جمع ریشه‌ها})) - x^r$$

بنابراین داریم:

$$\text{از } x^2 - \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right) x + 1 = 0$$

$$\text{از طرفی } \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^r + \beta^r}{\alpha\beta}$$

با توجه به معادله داده شده، $\alpha + \beta = -\frac{3}{2}$ و $\alpha\beta = \frac{1}{2}$ در نتیجه:

$$\alpha^r + \beta^r \equiv (\alpha + \beta)^r - r\alpha\beta = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$$

بنابراین، معادله خواسته شده به صورت زیر است:

$$x^2 - \frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{2}} x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{5}{2} x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

مثال ۷ :

یک سنگ به طور عمودی رو به بالا با سرعت ۲۰ متر بر ثانیه پرتاب می شود که پ از t ثانیه در ارتفاع y متر بالای نقطه ۰ می باشد، که داریم:

$$y = 20t - 5t^2$$

در چه زمانی سنگ در ارتفاع بیشتر از ۱۰ متری بالای نقطه ۰ قرار دارد؟
(با توجه به مفروضات مسأله) ما خواهیم داشت:

$$20t - 5t^2 > 10 \quad \text{یا} \quad -5t^2 + 20t - 10 > 0$$

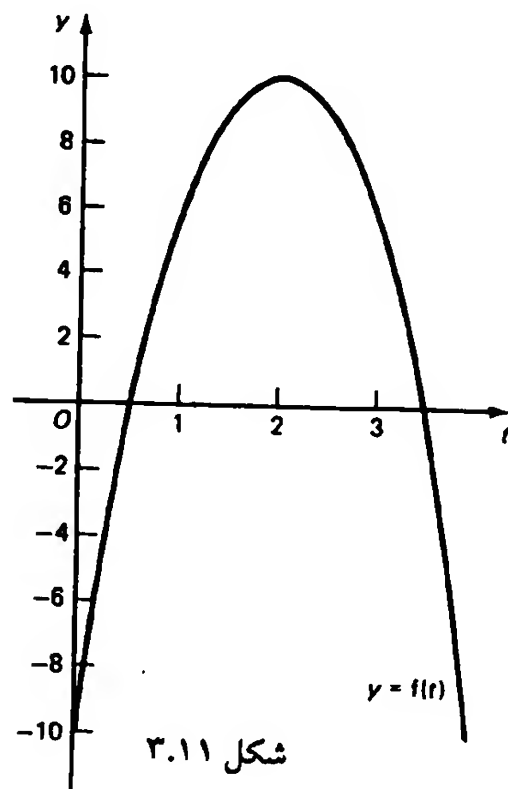
فرض کنیم $f(t) = -5t^2 + 20t - 10$ ، در این صورت:

$$(۱) f(0) = -10$$

$$(۲) \text{ اگر } t \rightarrow \pm\infty, f(t) \rightarrow -\infty$$

$$(۳) f(t) = 0 \Rightarrow -5t^2 + 20t - 10 = 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 2 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{(16-8)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} \quad (t_2 - t_1 = \sqrt{8})$$



شکل ۳.۱۱

حال این ریشه‌ها را t_1 و t_2 می‌نامیم. در این صورت یک ترسیم از $f(t)$ در شکل ۳.۱۱ داده شده. از رسم شکل واضح است که برای هر $t_1 < t < t_2$ ، $f(t) > 0$ ، یعنی برای یک مدت زمان $(t_2 - t_1)$ ثانیه که برابر است با $\sqrt{8} = 2.83$ ثانیه می‌توان گفت سنگ در ارتفاع بیش از ۱۰ متری بالای نقطه ۰ می‌باشد.

تمرین ۳:

۱- قسمتهای مهم شکلها را توصیف کرده و نمودار هریک را رسم کنید:

الف) $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$

ب) $g(x) = 4 - 3x - x^2$

ج) $h(x) = x^2 - x + 3$

همچنین $\frac{1}{f(x)}$ ، $\frac{1}{g(x)}$ و $\frac{1}{h(x)}$ را رسم کنید:

۲- معادلات درجه ۲ زیر را حل کنید:

الف) $3x^2 - 2x + 1 = 0$

ب) $x^2 + 3x - 2 = 0$

ج) $4x^2 - 20x + 24 = 0$

د) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

۳- حوزه مقادیر x را برای هریک از نامعادلات زیر بیابید:

الف) $x^2 > x$

ب) $x^2 < x - 2$

ج) $x^2 \leq 1 - x$

د) $x^2 > x - 1$

۴- اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند، بدون حل این معادله

معادلاتی تشکیل دهید که ریشه‌های آنها به صورت زیر باشند:

الف) $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$

ب) $(\alpha + 2\beta)$ و $(2\alpha + \beta)$

ج) $\frac{1}{\alpha^2}$ و $\frac{1}{\beta^2}$

۵- فرض کنید که $f(x) = px^2 - 2x + 3p + 2$ ، دو مقدار برای p بیابید به قسمی که معادله $f(x) = 0$ ریشه‌های مساوی داشته باشد. همچنین مجموعه مقادیری برای p بیابید که به ازای آنها $f(x)$ برای هر مقدار حقیقی x ، منفی باشد. برای هریک از حالت‌های $p = -2$ و $p = 1$ ، نمودار $y = f(x)$ را رسم کنید.

۶- فرض کنید که یکی از ریشه‌های معادله $x^2 + 3x + c = 0$ دو برابر دیگری باشد، در این صورت مقدار c را بیابید.

۷- هرگاه k یک ثابت حقیقی (عدد حقیقی ثابت) باشد، ریشه‌های معادله

$$4kx = x^2 + 6x + 9 \text{ را با } \alpha \text{ و } \beta \text{ نشان می‌دهیم.}$$

الف) نشان دهید؛ معادله‌ای که ریشه‌هایش $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ می‌باشند به صورت

$$4kx = x^2 + 6x + 9 \text{ می‌باشد.}$$

ب) مجموعه مقادیری برای k بیابید به قسمی که α و β دو مقدار حقیقی باشند.

ج) همچنین مجموعه مقادیری برای k بیابید به قسمی که α و β حقیقی و مثبت باشند.

اثبات ریاضی

۴.۱ بعضی از مفاهیم منطقی

ریاضیات با عددها و نمادها سر و کار دارد، اما آنچه که در واقع ریاضیات را از سایر علوم متمایز می‌کند؛ استفاده از اثبات است. از یک نظریه علمی می‌توان با چندین هزار مشاهده پشتیبانی کرد اما هیچگاه نمی‌توان آن را با مشاهده به اثبات رساند. زیرا همواره این امکان وجود دارد که مشاهده گری مدرک متناقضی به دست آورد.

در ریاضیات با گزاره‌ها یا قضایا سر و کار داریم. برای هدف فعلی مان، گزاره را به صورت جمله‌ای که راست یا دروغ است، اما هر دو نیست، تعریف می‌کنیم. اثبات عبارت است از: دنباله‌ای از مراحل منطقی که از مجموعه‌ای از گزاره‌های معلوم به گزاره جدیدی که باید ثابت شوند منجر می‌شود.

هر یک از مراحل منطقی‌ای که استدلال به کمک آنها پیش می‌رود به صورت «اگر گزاره P راست باشد، آنگاه نتیجه می‌شود که گزاره Q راست است» می‌باشد. این صورت معمولاً با «اگر P آنگاه Q» یا «مستلزم Q است» مختصر می‌شود. این موضوع را به صورت نماد چنین می‌نویسیم:

$$P \Rightarrow Q$$

صحت مرحله مورد بحث به این که P واقعیتی راست است یا نه، وابسته نیست.

فی‌المثل، استدلال

(ارزش چهار تخم مرغ ۲۰ تومان است.) \Rightarrow (ارزش یک تخم مرغ ۵ تومان است.)

بی‌توجه به ارزش واقعی تخم مرغ درست است.

طریق دیگر نوشتن $P \Rightarrow Q$ عبارت است از: $Q \Leftarrow P$ ، که به معنی «Q ملزوم P است» می‌باشد.

مثال ۱ :

$$(PA = PB) \Rightarrow (P \text{ نقطهٔ وسط پاره خط مستقیم } AB \text{ است}).$$

گزارهٔ $(Q \Rightarrow P)$ عکس گزارهٔ $(P \Rightarrow Q)$ است. اگر $P \Rightarrow Q$ گزاره‌ای درست باشد، عکسش می‌تواند درست باشد یا درست نباشد.

مثال ۲ :

$$(x = 4) \Rightarrow (x^2 = 16)$$

$$(x^2 = 16) \Rightarrow (x = 4 \text{ یا } x = -4)$$

اما :

یکی از خطاهای متعارف در برهان اثبات عکس مطلبی است که اثباتش را خواسته‌اند.

مثال ۳ :

ثابت کنید در صورتی که:

$$c^2 = a^2(1 + m^2)$$

$$y = mx + c \text{ بر } x^2 + y^2 = a^2 \text{ مماس است.}$$

در این مورد غالباً راه حل زیر ارائه می‌شود. اگر $y = mx + c$ بر $x^2 + y^2 = a^2$ مماس باشد، آنگاه :

$$x^2 + (mx + c)^2 = a^2 \text{ و معادله دارای ریشه‌های مساوی است.}$$

$$\Rightarrow [x^2 + m^2x^2 + 2mcx + c^2 - a^2 = 0] \text{ دارای ریشه‌های مساوی است}$$

$$\Rightarrow [4m^2c^2 = 4(1 + m^2)(c^2 - a^2)]$$

$$\Rightarrow [c^2 = a^2(1 + m^2)]$$

مطلب فوق عکس نتیجه‌ای است که باید اثبات شود. اثبات صحیح به صورت زیر است:

$$[\text{معادله بر حسب } x \text{ ریشه‌های مساوی دارد.}] \Rightarrow [\text{معادله } c^2 = a^2(1 + m^2)]$$

$$\Rightarrow (\text{خط } y = mx + c \text{ تماس دوگانه با } x^2 + y^2 = a^2 \text{ دارد.})$$

$$\Rightarrow (\text{خط مماس است.})$$

در این رابطه باید احتیاط به عمل آورده شود.

اگر $P \Rightarrow Q$ ، گزاره‌ای درست باشد می‌گوییم : P شرط کافی برای Q است. اگر $P \Leftarrow Q$

می‌گوییم: P شرط لازم برای Q است. زمانی که $Q \Rightarrow P$ و $Q \Rightarrow P$ ، می‌گوییم: P هم‌ارز Q است و می‌نویسیم: $P \Leftrightarrow Q$. این به معنی «اگر و تنها اگر Q است و P را شرط لازم و کافی برای Q می‌گوییم.

این که استلزام و هم‌ارزی یکی نیستند توسط مثال زیر نموده شده است.

مثال ۴:

معادله $\sqrt{3x} - \sqrt{x+1} = 1$ را حل کنید.

معادله را به صورت $\sqrt{3x} - 1 = \sqrt{x+1}$ می‌نویسیم. با مربع کردن طرفین آن، به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} 3x + 1 - 2\sqrt{3x} &= x + 1 \\ \Rightarrow 2x &= 2\sqrt{3x} \text{ یا } x = \sqrt{3x} \\ \Rightarrow x^2 &= 3x \text{ (دو طرف را مربع می‌کنیم.)} \\ \Rightarrow x &= 3 \text{ یا } x = 0 \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\sqrt{3x} - \sqrt{x+1} = 1 \Rightarrow x = 0, 3$$

این مسیر لزوماً وارون‌پذیر نیست.

$$x = 3 \Rightarrow \sqrt{3x} - \sqrt{x+1} = 1 \text{ بنابراین } x = 3 \text{ جواب است.}$$

$$x = 0 \Rightarrow \sqrt{3x} - \sqrt{x+1} = -1 \text{ بنابراین } x = 0 \text{ جواب نیست.}$$

دلیل ظهور ریشه خارجی $x = 0$ این است که در فوق دوبار طرفین معادله را به توان دو

رساندیم و ریشه $\sqrt{3x} - \sqrt{x+1} = -1$ را نیز مشمول کردیم.

نقیض گزاره P گزاره P' (یا $\sim P$) است که چون P راست باشد P' دروغ و چون P

دروغ باشد P' راست است. P' (یا $\sim P$) غالباً به صورت «چنین نیست که P » خوانده می‌شود.

مثال ۵:

(الف) اگر گزاره P گزاره $(x = 2)$ باشد، آنگاه P' گزاره $(x \neq 2)$ است.

(ب) اگر گزاره P گزاره $(C \text{ بر } AB \text{ واقع است})$ باشد، آنگاه P' (یا $\sim P$) گزاره $(C \text{ بر } AB$

واقع نیست) می‌باشد.

مثال ۶ :

فرض می‌کنیم: گزاره $P: (x = 2)$
 Q گزاره $(x' = 4)$ باشد.

در این صورت :

$$P': (x \neq 2)$$

$$Q': (x' \neq 4)$$

توجه داشته باشید که

$$P \Rightarrow Q \text{ (یعنی اگر } x = 2 \text{ آنگاه } x' = 4 \text{).}$$

$$Q' \Rightarrow P' \text{ (یعنی اگر } x' \neq 4 \text{ آنگاه } x \neq 2 \text{).}$$

دقت کنید که گزاره‌های $P \Rightarrow Q$ و $Q' \Rightarrow P'$ هر دو دروغند. هر یک از دو گزاره $P \Rightarrow Q$ و $Q' \Rightarrow P'$ را عکس نقیض یکدیگر گویند. رابطه زیر را داریم: «یک گزاره و عکس نقیض هر دو راست یا هر دو دروغند»، بنابراین:

$$P \Rightarrow Q \text{ و } Q' \Rightarrow P' \text{ گزاره‌هایی هم‌ارزاند.}$$

۴.۲ اثبات با استفاده از تناقض (برهان خلف)

با نقیض کردن نقیض به گزاره اصلی باز می‌گردیم، بنابراین $(P')'$ همان P است. این نتیجه پایه روش قدرتمند اثبات موسوم به «اثبات با استفاده از تناقض» است. می‌توانیم راستی P را با نشان دادن این که P' دروغ است، اثبات کنیم.

مثال ۷ :

اثبات کنید که بی‌نهایت عدد اول موجودند. (عدد اول عاملی مثبت جز ۱ و خودش ندارد.)

گزاره نقیض شده زیر را در نظر می‌گیریم:

(تعداد اولها متناهی است)

(عدد صحیح P ای چنان وجود دارد که P بزرگترین اول است) \Rightarrow

عدد $1 + P!$ را در نظر می‌گیریم. این عدد بر P یا بر هر عدد صحیح و مثبت کمتر از P بخش پذیر نیست (باقیمانده در هر حالت ۱ است).

$\Leftarrow (P! + 1)$ بر عدد صحیحی غیر از ۱ یا $(P! + 1)$ بخش پذیر نیست، که در این حالت $P! + 1$ اول است یا $P! + 1$ بر عددی بین P و $(P! + 1)$ بخش پذیر است.
 \Leftarrow عدد اول بزرگتر از P ای موجود است.
 فرض «تعداد اعداد اول متناهی است» \Leftarrow
 $(1) P$ بزرگترین عدد اول است.
 (2) عدد اولی بزرگتر از P وجود دارد.
 (1) و (2) متناقض اند. در نتیجه، گزاره (تعداد اولها متناهی است) دروغ است و لذا گزاره (تعداد اولها نامتناهی است) راست می باشد.

۴.۳ کاربرد مثال نقض

اثبات این که گزاره ای دروغ است غالباً بسیار آسانتر از اثبات راست بودن آن است. برای اثبات دروغ بودن یک گزاره، تمام کاری که لازم است، تهیه درست یک حالت است که به ازای آن گزاره در واقع دروغ باشد. این حالت (تناقض) به مثال نقض موسوم است.

مثال ۸ :

مثالهای نقضی بیابید که نشان دهند گزاره های زیر دروغند:

(الف) $(x^2 = y^2) \Rightarrow (x = y)$.

(ب) $(a - b > 0) \Rightarrow (a^2 - b^2 > 0)$.

(ج) (جمع عددهای فرد اولند).

(الف) $x = 3, y = -3$ در $x^2 = y^2$ صادق اند اما در $x = y$ نیستند. گزاره دروغ است.

(ب) اگر $a = 1, b = -2$ ، آنگاه $a - b = 3$ که $0 < a - b$ است، اما $a^2 - b^2 = -3$

که $0 > a^2 - b^2$ است.

(ج) ۹ عددی فرد است اما اول نیست.

۴.۴ اثبات با استفاده از استنتاج

اثبات با استفاده از استنتاج، روش اثباتی می باشد، که پیش از این هم در این کتاب به کار

برده‌ایم. روش مذکور روشی از اثبات است که احتمالاً خواننده بیش از سایر روشها با آن آشناست و اغلب بدون ذکر کلمه «اثبات» به کار می‌رود.

در اصل، برای اثبات $P \Rightarrow Q$ ، کار را با چندین مرحله میانی، اثبات $P \Rightarrow R$ ، بعد $R \Rightarrow S$ و سپس $S \Rightarrow Q$ ، انجام می‌دهیم. (البته ممکن است بیش از دو مرحله میانی موجود باشند).

مثال ۹:

اثبات کنید که

$$(x^2 - 5x + 6 = 0) \Rightarrow (x = 2, 3)$$

$$(x^2 - 5x + 6 = 0) \text{ گزاره}$$

$$\Leftrightarrow [(x - 3)(x - 2) = 0]$$

$$\Leftrightarrow [x - 3 = 0 \text{ یا } x - 2 = 0]$$

$$\Leftrightarrow [x = 3 \text{ یا } x = 2]$$

در این جا نتیجه مطلوب و عکس آن را اثبات کرده‌ایم.

۴.۵ اثبات با استفاده از اشباع

روش اثبات با استفاده از اشباع (البته نه وضعیت ذهنی!) کاربردی محدود دارد و منحصر به مواردی است که در آنها تنها تعدادی متناهی از امکاناتی موجودند که ممکن است هریک را به نوبت مورد بررسی قرار داد.

مثال ۱۰:

ثابت کنید که معادله $x^2 + y^2 = 11$ دارای جواب صحیح نیست.

اگر $x = 1$ آنگاه:

$$x^2 + y^2 = 2 \text{ می دهد } y = 1$$

$$x^2 + y^2 = 5 \text{ می دهد } y = 2$$

$$x^2 + y^2 = 10 \text{ می دهد } y = 3$$

$$x^2 + y^2 > 11 \text{ می دهد } y = 4$$

اگر $x = 2$ ، آنگاه:

$$x' + y' = 5 \text{ می دهد } y = 1$$

$$x' + y' = 8 \text{ می دهد } y = 2$$

$$x' + y' > 11 \text{ می دهد } y = 3$$

اگر $x = 3$ ، آنگاه:

$$x' + y' = 10 \text{ می دهد } y = 1$$

$$x' + y' > 11 \text{ می دهد } y = 2$$

اگر $x = 4$ ، آنگاه:

$$x' + y' > 11$$

به این ترتیب، جميع امکانات را بررسی کرده ایم. در این مورد واضح است که نیاز به بررسی مقادیر منفی نداریم. این نیز احتمالاً واضح است که می توانستیم زحمت خود را با استفاده از این حقیقت که معادله مفروض نسبت به x و y متقارن است کم کنیم و بنابراین تنها به بررسی جوابهایی که در آنها $x \geq y$ می باشد، نیاز داریم.

۴.۶ اثبات با استفاده از استقرای ریاضی

اثبات با استفاده از استقرای ریاضی، زمانی که نتیجه ای ممکن به گمان یا حدس مشخص شود، یکی از روشهای بسیار عمومی اثبات است. این روش، به طور معمول، وسیله کشف نتایج جدید نیست بلکه روش اثبات (صوری) نتایجی است که انتظار راست بودنشان می رود. این روش اثبات در مورد گزاره هایی مانند (S) که با عدد صحیح و مثبتی چون n سرو کار دارند به کار می رود. می خواهیم اثبات کنیم که گزاره (S)، به ازای جميع عددهای صحیح n که بزرگتر از عدد صحیح ثابت n_0 هستند، راست است. عدد صحیح ثابت n_0 معمولاً ۱ است اما لازم نیست که چنین باشد. (مثالهای ۱۴ و ۱۵ را ملاحظه کنید). اثبات مورد بحث دو مرحله تمایز دارد.

(۱) نشان دادن این که، گزاره مورد نظر (S) به ازای مقدار n_0 ای از n راست است.
(۲) نشان دادن این که اگر گزاره مورد نظر (S) به ازای مقدار خاص n ای، مثلاً $n = K$ ، راست فرض شود. آنگاه (S) به ازای مقدار بعدی $n - 1$ ، یعنی به ازای $n = K + 1$ نیز راست است. با استفاده از (۲)، می توانیم راستی گزاره مورد نظر را به ازای هر مقدار بعدی n با آغاز

از مقدار واقع در (۱) اثبات کنیم.

این روش اثبات را می‌توان با فرآیند بالارفتن از پله‌های یک طبقه مقایسه کرد. اگر بتوانیم (۱) به مکان شروع در جایی از پلکان برسیم و (۲) از یک پله به پله دیگر برویم، در این صورت می‌توانیم تا هر کجا که بخواهیم به بالارفتن ادامه بدهیم.

مثال ۱۱ :

با استفاده از استقرا، ثابت کنید که، به ازای $n \in \mathbb{Z}'$:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n (n + 1) \quad \text{اگر } n = 1$$

$$1 = (1 \text{ سمت چپ تساوی}) \cdot \text{ع. س. چ.}$$

$$1 = \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \right) = (2 \text{ سمت راست تساوی}) \cdot \text{ع. س. ر.}$$

در نتیجه، گزاره موردنظر به ازای $n = 1$ راست است.

فرض می‌کنیم گزاره به ازای $n = K$ راست باشد، یعنی:

$$1 + 2 + 3 + \dots + K = \frac{1}{2} K (K + 1) \quad (4.1)$$

در این صورت مجموع $(K + 1)$ جمله واقع در سمت چپ تساوی، عبارت است از:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + K + (K + 1) &= \frac{1}{2} K (K + 1) + (K + 1) : (4.1) \text{ با استفاده از} \\ &= \frac{1}{2} K (K + 1) (K + 2) \\ &= \frac{1}{2} (K + 1) [(K + 1) + 1] \end{aligned}$$

و این درست همان سمت راست تساوی معادله ۴.۱ است که در آن به جای K ، $K + 1$

قرار داده شده است. در نتیجه، اگر گزاره به ازای $n = K$ راست باشد، به ازای $n = K + 1$ نیز

راست است. اما گزاره به ازای $n = 1$ راست است. بنابراین به ازای $n = 1 + 1 = 2$ نیز

راست است. به همین ترتیب، به ازای $n = 3 = 2 + 1$ نیز راست است و غیره.

بنابراین، گزاره، با استفاده از استقرا، به ازای جميع عددهای صحیح $n \geq 1$ یا $n \in \mathbb{Z}'$

راست است.

مثال ۱۲ :

ثابت کنید، به ازای $n \in \mathbb{Z}^+$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \left[\frac{1}{2} n(n+1) \right]^2$$

اگر $n = 1$:

$$1 = \text{سمت چپ تساوی}$$

$$1 = \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \right]^2 = \text{سمت راست تساوی}$$

در نتیجه، گزاره به ازای $n = 1$ راست است.

فرض می‌کنیم گزاره به ازای $n = K$ راست باشد، یعنی :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + K^2 = \left[\frac{1}{2} K(K+1) \right]^2 \quad (4.2)$$

سمت چپ تساوی، اگر $n = (K+1)$ ، عبارت است از:

بنابراین معادله (۴.۲):

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + K^2 + (K+1)^2 &= \left[\frac{1}{2} K(K+1) \right]^2 + (K+1)^2 \\ &= \frac{1}{4} (K+1)^2 [K^2 + 4(K+1)] \\ &= \frac{1}{4} (K+1)^2 [K^2 + 4K + 4] \\ &= \frac{1}{4} (K+1)^2 + (K+2)^2 \\ &= \left\{ \frac{1}{2} (K+1) [(K+1) + 1] \right\}^2 \end{aligned}$$

این درست همان سمت راست تساوی معادله (۴.۲) است که در آن به جای K ، $(K+1)$ قرار داده شده است. در نتیجه، گزاره به ازای $n = K+1$ راست است، و، بنابراین، به ازای تمام مقادیر $n \in \mathbb{Z}^+$ نیز راست است.

مثال ۱۳ :

ثابت کنید به ازای $n \in \mathbb{Z}^+$ ، $5^n + 3$ بر ۴ بخش پذیر است.

$$f(n) = 5^n + 3$$

تعریف می‌کنیم:

اگر $n = 1$ ، $f(1) = 8$ ، که بر ۴ بخش پذیر است، و بنابراین نتیجه مورد نظر در این حالت راست است. فرض می‌کنیم که نتیجه به ازای $n = K$ راست است، بنابراین $f(K)$ مضربی از ۴ است. در این صورت:

$$f(K) = 5^k + 3 = N \times 4 \quad ; N \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{که در آن}$$

اکنون مورد زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(K + 1) = 5^{k+1} + 3$$

$$f(K + 1) - f(K) = 5^{k+1} - 5^k = 5^k \times (5 - 1) = 5^k \times 4$$

در نتیجه:

$$f(K + 1) = N \times 4 + 5^k \times 4$$

سمت راست تساوی به‌طور واضح بر ۴ بخش پذیر است و لذا نتیجه به ازای $n = K + 1$ راست است.

بنابراین: بنا به استقرا، نتیجه به ازای جميع مقادیر $n \in \mathbb{Z}^+$ راست است.

مثال ۱۴:

با معلوم بودن این که به ازای $n \in \mathbb{N}$ ، $f(n) = n^2 - n$ ، ثابت کنید هرگاه $n \geq 2$ ، حاصل $f(n)$ عددی زوج است.

چون $n = 1$ ، $f(n)$ صفر است و بنابراین نکته‌ای در این پرسش که فرد یا زوج است باقی نمی‌ماند. در این مسأله $n_0 = 2$ را در نظر می‌گیریم.

$$\text{چون } n = 2, f(2) = 4 - 2 = 2, \text{ و نتیجه راست است.}$$

فرض می‌کنیم نتیجه به ازای $n = K$ راست باشد، بنابراین:

$$\text{که در آن } f(K) = K^2 - K = 2P, \quad P \in \mathbb{Z}^+$$

حالا:

$$f(K + 1) = (K + 1)^2 - (K + 1)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} f(K + 1) - f(K) &= (K + 1)^2 - (K + 1) - (K^2 - K) \\ &= K^2 + 2K + 1 - K - 1 - K^2 + K = 2K \end{aligned}$$

$$f(K + 1) = f(K) + 2K = 2P + 2K$$

در نتیجه:

که واقعاً زوج است. بنابراین، بنا به استقرا، نتیجه به ازای جميع مقادير درست $n \geq 2$ راست است. اما، توجه داشته باشید که اثبات استقرایی دیگری به طریق زیر است:

$$f(n) = n(n-1)$$

بنابراین: $f(n)$ حاصل ضرب دو عدد صحيح متوالی است، که یکی از آنها باید زوج و دیگری فرد باشد، بنابراین $f(n)$ زوج است. برای اثبات يك نتیجه ممکن است چندین راه موجود باشند، بنابراین در صورتی که اولین روشی که به کار می برید کارا نباشد تسلیم نشوید.

مثال ۱۵:

با معلوم بودن این که $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$ ، با استقرا ثابت کنید که

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

سمت چپ تساوی را T_n می نامیم. بار دیگر استقرا را با $n = 2$ شروع می کنیم.

$$T_2 = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4} \quad \text{چون } n = 2$$

و سمت راست تساوی نیز $\frac{3}{4}$ است. به این ترتیب؛ نتیجه به ازای $n = 2$ راست است. فرض می کنیم نتیجه به ازای $n = k$ راست است، بنابراین:

$$T_k = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{k+1}{2k} \quad (4.3)$$

سمت چپ تساوی اگر $n = k+1$ ، T_{k+1} است، که در آن:

$$T_{k+1} = T_k \left[1 - \frac{1}{(k+1)^2} \right]$$

این رابطه را می توانیم با به کار بردن تساوی (۴.۳) به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= \frac{k+1}{2k} \left[1 - \frac{1}{(k+1)^2} \right] = \frac{(k+1)[(k+1)^2 - 1]}{2k(k+1)^2} \\ &= \frac{(k^2 + 2k)}{2k(k+1)} = \frac{(k+2)}{2(k+1)} = \frac{(k+1)+1}{2(k+1)} \end{aligned}$$

و این درست همان سمت راست تساوی (۴.۳) است که به جای k ، $(k + 1)$ قرار داده شده است، و بنابراین نتیجه چون $n = k + 1$ ، راست است. در نتیجه، بنا به استقرا، نتیجه به ازای جمیع عددهای صحیح $n \geq 2$ راست است.

مثال ۱۶ :

دنباله عددهای u_1, u_2, u_3, \dots با $u_1 = 1$ و $u_2 = 5$ و $n \geq 1$ و $u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0$ تعریف شده است ثابت کنید:

$$u_n = 3^n - 2^n$$

در این مسأله از تعمیم روش استقرا استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم (S_n) گزاره $(u_n = 3^n - 2^n)$ باشد.

$$\text{(الف) اگر } n = 1, \text{ } 3 - 2 = 1 = u_1$$

$$\text{اگر } n = 2, \text{ } 3^2 - 2^2 = 5 = u_2$$

بنابراین (S_n) ، چون $n = 1, 2$ ، راست است.

(ب) اگر (S_n) ، به ازای $n = k$ و به ازای $n = k + 1$ ، راست باشد، آنگاه:

$$u_{k+2} = 5u_{k+1} - 6u_k$$

$$= 5(3^{k+1} - 2^{k+1}) - 6(3^k - 2^k)$$

$$= 3^k(5 \times 3 - 6) - 2^k(5 \times 2 - 6)$$

$$= 3^k \times 9 - 2^k \times 4 = 3^{k+2} - 2^{k+2}$$

و بنابراین (S_n) ، چون $n = k + 2$ ، نیز راست است.

به این ترتیب؛ اگر (S_n) به ازای دو مقدار متوالی n راست باشد، به ازای مقدار بعدی n نیز راست است. اما (S_n) به ازای مقادیر متوالی $1, 2$ ، $n = 1$ راست است، در نتیجه؛ بنا به استقرا، (S_n) به ازای جمیع مقادیر $n \geq 1$ راست است.

۴.۷ اثبات نتایج متعارف با استفاده از استقرا

تساعد حسابی

نتیجه متعارف در این مورد عبارت است از:

$$a + (a + d) + \dots + [a + (n - 1)d] = \frac{1}{2} n [2a + (n - 1)d]$$

فرض می‌کنیم S_n سمت چپ تساوی این معادله را نمایش دهد.

اگر $n = 1$ ، $S_1 = a$ و $2a = a$ ، سمت راست تساوی، بنابراین: نتیجه مطرح شده، به ازای $n = 1$ ، راست است.

فرض می‌کنیم به ازای $n = k$ نیز راست باشد، بنابراین:

$$S_k = a + (a + d) + \dots + [a + (k - 1)d] = \frac{1}{2} k [2a + (k - 1)d] \quad (4.4)$$

$$S_{k+1} = S_k + (a + kd) \quad \text{در نظر می‌گیریم:}$$

$$= \frac{1}{2} k [2a + (k - 1)d] + (a + kd)$$

با استفاده از رابطه (4.4):

$$= ka + \frac{1}{2} k(k - 1)d + a + kd$$

$$= (k + 1)a + \frac{1}{2} kd(k - 1 + 2) = (k + 1)a + \frac{1}{2} kd(k + 1)$$

$$= \frac{(k + 1)}{2} [2a + (k + 1 - 1)d]$$

که درست همان سمت راست تساوی معادله (4.4) است که در آن $k + 1$ به جای k قرار گرفته است، در نتیجه، بنا به استقرا، نتیجه مورد بحث به ازای $n \in \mathbb{Z}^+$ راست است.

تساعد هندسی

نتیجه متعارف تصاعدات هندسی عبارت است از:

$$a + ar + \dots + ar^{n-1} = \frac{a(1 - r^n)}{(1 - r)} \quad (r \neq 1)$$

فرض می‌کنیم S_n ، سمت چپ تساوی این معادله را نمایش دهد.

$$\text{اگر } n = 1 \text{ و } s_1 = a \text{ و } \frac{[a(1-r)]}{(1-r)} = a \text{ سمت راست تساوی}$$

بنابراین نتیجه مورد نظر به ازای $n = 1$ راست است.

فرض می‌کنیم نتیجه به ازای $n = k$ راست باشد، بنابراین:

$$S_k = a + ar + \dots + ar^{k-1} = \frac{a(1-r)^k}{(1-r)} \quad (۴.۵)$$

$$S_{k+1} = S_k + ar^k = \frac{a(1-r)^k}{(1-r)} + ar^k \quad : (۴.۵) \text{ معادله}$$

$$= \frac{a - ar^k + ar^k - ar^{k+1}}{(1-r)} = \frac{a(1-r^{k+1})}{(1-r)}$$

که درست همان سمت راست تساوی (۴.۵) است که به جای k ، $k+1$ قرار گرفته است.

در نتیجه، بنا به استقرا، نتیجه مورد نظر به ازای $n \in \mathbb{Z}^+$ راست است.

بسط دوجمله‌ای به ازای $n \in \mathbb{Z}^+$

نتیجه متعارفی که با استقرا اثبات می‌کنیم عبارت است از:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!}x^r + \dots + x^n$$

باید توجه داشته باشیم؛ تا آنجا که با استقرا سر و کار داریم، n باید عددی صحیح و مثبت باشد. نیز توجه داشته باشید که

$$r! = r(r-1)(r-2)\dots 2.1$$

بار دیگر، فرض می‌کنیم S_n نمایشگر سمت چپ تساوی باشد.

$$\text{اگر } n = 1 \text{ و } s_1 = 1 + x \text{ و } 1 + x + 0 + \dots + 0 = 1 + x \text{ سمت راست تساوی}$$

بنابراین نتیجه به ازای $n = 1$ راست است.

فرض می‌کنیم نتیجه به ازای $n = k$ راست باشد، بنابراین:

$$S_k = (1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dots$$

$$+ \frac{k(k-1)\dots(k-r+1)}{r!}x^r + \dots + x^k \quad (۴.۶)$$

واضح است که

$$S_{k+1} = S_k(1+x)$$

$$= \left[1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-r+1)}{r!}x^r + \dots + x^k \right] (1+x)$$

$$= \left[1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{k(k+1)\dots(k-r+1)}{r!}x^r + \dots + x^k \right]$$

$$+ \left[x + kx^2 + \frac{k(k-1)}{2!}x^3 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-r+1)}{r!}x^{r+1} + \dots + x^{k+1} \right]$$

$$= 1 + (k+1)x + \left[\frac{k(k-1)}{2} + k \right]x^2 + \dots + A_r x^r + \dots + x^{k+1}$$

که در آن:

$$A_r = \frac{k(k-1)\dots(k-r+1)}{r!} + \frac{k(k-1)\dots(k-r+2)}{(r-1)!}$$

$$= \frac{k(k-1)\dots(k-r+2)}{(r-1)!} \left[\frac{(k-r+1)}{r} + 1 \right]$$

$$= \frac{(k+1)k(k-1)\dots(k-r+2)}{r!}$$

و این درست همان ضریب x^r واقع در معادله (۴.۶) است که به جای k ، $k+1$ قرار گرفته است. در نتیجه، بنا به استقرا، نتیجه مورد نظر به ازای $n \in \mathbb{Z}^+$ راست است.

تمرین ۴:

۱- نماد صحیح \Rightarrow یا \Leftarrow را بین گزاره‌های زیر قرار دهید:

(الف) $(x < -3) \quad (x^2 > 9)$

(ب) $(x = 2) \quad (x^2 + x - 6 = 0)$

۲- نقیض گزاره زیر را بیان کنید:

$f(x) > x$ به ازای تمام مقادیر $x > 1$

۳- مشخص کنید کدام یک از استلزامات زیر راست و کدام دروغ است:

(الف) $x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$

(ب) $x = -3$ یا $x = 2 \Rightarrow (x - 2)(x + 3) = 0$

(ج) $f(x) = x^2 - 3x + 5 \Rightarrow f(x) > 0$

۴- با استفاده از روش اثبات با تناقض، نشان دهید که $\sqrt{2}$ گنگ است.

(راهنمایی: فرض کنید $\sqrt{2}$ گویاست و بنابراین می‌تواند به صورت $\frac{p}{q}$ نوشته شود.)

۵- مثالی نقض برای رد هر یک از گزاره‌های زیر بیابید:

(الف) هر عدد به صورت $6n + 1$ عددی اول است.

(ب) $a + b > 2\sqrt{ab}$

(ج) $(a - b > 0) \Rightarrow (a^2 - b^2 > 0)$

۶- ثابت کنید که $(x^2 - 4x + 3 = 0) \Rightarrow (x = 1 \text{ یا } x = 3)$

۷- در اثبات گزاره‌های زیر از اثبات به کمک استقرا استفاده کنید:

(الف) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(ب) $3 \times 7^{2n} + 1$ برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ بر ۲ بخش پذیر است.

(ج) اگر $u_{n+2} = 10u_{n+1} - 25u_n$ و $u_1 = 0$ و $u_2 = 1$ آنگاه: $u_n = (n-1)5^{n-2}$ و $n > 2$

(د) $(1 - \frac{4}{1})(1 - \frac{4}{9})(1 - \frac{4}{25}) \dots (1 - \frac{4}{(2n-1)^2}) = \frac{1+2n}{1-2n}$

(ه) به ازای $2^n > 2n, n \geq 2, n \in \mathbb{Z}^+$

دنباله‌ها و سریها

۵.۱ دنباله‌ها

رشته‌های عددهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(۵.۱) \quad ۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰$$

$$(۵.۲) \quad ۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, \dots$$

اینها مثالهایی هستند از دنباله‌هایی از عددها. در هر دنباله از عددها یک ترتیب خاصی وجود دارد و علاوه بر آن، هر عدد معمولاً با یک قاعده مشخصی به عددهای دیگر مربوط است. هر عدد، یک جمله از دنباله نامیده می‌شود.

دنباله (۵.۱) دقیقاً دارای پنج جمله می‌باشد و مثالی از یک دنباله متناهی است.

دنباله (۵.۲) را می‌توان به صورت $۱^2, ۲^2, ۳^2, ۴^2, ۵^2, \dots$ نوشت که سه نقطه به معنی نامحدود بودن جمله‌ها است. این دنباله دارای تعدادی نامتناهی جمله است و یک دنباله نامتناهی نامیده می‌شود.

برای مشخص کردن (یا تعریف) یک دنباله به اطلاعات زیر نیازمندیم:

(۱) جمله اول،

(۲) تعداد جمله‌ها،

(۳) قاعده‌ای (فرمولی) که توسط آن جمله‌ها قابل محاسبه باشند.

جمله اول یک دنباله معمولاً با نماد u_1 و جمله عمومی آن با u_n نمایش داده می‌شود. بنابراین دنباله (۵.۱) توسط $u_1 = ۲$ و $u_r = ۲r$ مشخص می‌شود. از طرفی چون این دنباله یک دنباله متناهی است، تنها مقادیر برای r عبارتند از: $۱, ۲, ۳, ۴, ۵$. ما دنباله (۵.۲) را توسط $u_1 = ۱$ و $u_r = r^2$ مشخص می‌کنیم. در این دنباله محدودیتی برای r وجود نداشته، به طوری که $r = ۱, ۲, ۳, \dots$.

مثال ۱ :

جمله عمومی دنباله ای به صورت $u_r = ar + b$ ، می باشد که a و b عددهای ثابت هستند. اگر فرض کنیم: $u_1 = 5$ و $u_7 = 11$ ، در این صورت؛ مقادیر a و b را یافته و نشان دهید که $u_9 = 29$.

$$(u_1 = 5) \Rightarrow (a + b = 5)$$

$$(u_7 = 11) \Rightarrow (7a + b = 11)$$

از حلّ این دستگاه معادلات، خواهیم داشت:

$$(a = 3 \text{ و } b = 2) \Rightarrow u_r = 3r + 2$$

با قرار دادن $r = 9$ ، $u_9 = 29$ به دست می آید.

مثال ۲ :

اولین پنج جمله دنباله زیر که با جمله عمومی $u_r = 2^r$ مشخص شده است را بنویسید.
 $u_1 = 2^1 = 2$ و $u_2 = 2^2 = 4$ و $u_3 = 2^3 = 8$ و $u_4 = 2^4 = 16$ و $u_5 = 2^5 = 32$.

۵.۲ سریها

وقتی که جمله های یک دنباله را با یکدیگر جمع کنیم یک سری حاصل می شود. برای مثال دنباله (۵.۲) سری زیر را به ما می دهد:

$$2 + 4 + 8 + 16 + 32 \quad (5.4)$$

که این مثالی از یک سری متناهی است.

دنباله (۵.۲) سری زیر را حاصل می کند، که این سری مثالی از یک سری نامتناهی است.

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \dots \quad (5.5)$$

ما در حالت کلی از دنباله متناهی u_1, u_2, \dots, u_n ، سری زیر را می توانیم داشته باشیم:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad (5.6)$$

با استفاده از نماد سیگما، امکان این هست که این سری را بتوان به صورت مختصرتری نوشت. به جای سری (۵.۶) می نویسیم:

$$\sum_{r=1}^n u_r \quad (5.7)$$

نماد \sum یکی از حروف بزرگ یونانی است، و متناظر با S می باشد که S اولین حرف کلمه Sum است (به معنی جمع). عبارت (۵.۷) به صورت «سیگما r مساوی با یک تا n از u_r » خوانده می شود. کلمه سیگما ممکن است به جای جمع به کار گرفته شود. عبارت (۵.۷) نشان می دهد که یک عمل جمع انجام پذیرفته است به صورتی که، وقتی r به طور متوالی عددهای صحیح ۱ تا n را می پذیرد، جمله ها توسط u_r با هم جمع می شوند. معمولاً حد پایینی جمع را در پایین \sum و حد بالایی را در بالای آن قرار می دهیم. عبارت (۵.۷) حتی گاهی اوقات برای مختصر نویسی به صورت $\sum_1^n u_r$ نوشته می شود.

مثال ۳ :

سریهای زیر را به شکل صریح (باز شده) بنویسید :

$$(الف) \sum_{r=1}^4 \frac{(-1)^r}{r} \quad (ب) \sum_{r=0}^4 (-1)^{r+1} r(r+1) \quad (ج) \sum_{r=2}^4 r!$$

$$(الف) \sum_{r=1}^4 \frac{(-1)^r}{r} = \frac{(-1)^1}{1} + \frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^4}{4} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$(ب) \sum_{r=0}^4 (-1)^{r+1} r(r+1) = 0 + (-1)^2 \times 1 \times 2 + (-1)^3 \times 2 \times 3 + (-1)^4 \times 3 \times 4 + (-1)^5 \times 4 \times 5 = 2 - 6 + 12 - 20$$

$$(ج) \sum_{r=2}^4 r! = 2! + 3! + 4! = 2 + 6 + 24$$

یادآوری می کنیم که، $r! = r(r-1)(r-2) \dots 2 \times 1$

توجه دارید که در قسمت ب) و ج) ما به ترتیب از $\sum_{r=2}$ و $\sum_{r=0}$ استفاده کردیم.

مثال ۴ :

سریهای زیر را به صورت نماد سیگما نمایش دهید:

(الف) $1 - a + a^2 - a^3$

(ب) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$

(الف) ما توجه داریم که جمله عمومی به شکل $a^r \pm$ است، که وقتی r زوج است علامت آن مثبت (ما صفر را مثبت در نظر می گیریم) و زمانی که r فرد است علامت آن منفی می باشد. چهار جمله فوق متناظر با $r = 0, 1, 2, 3$ است. بنابراین داریم:

$$1 - a + a^2 - a^3 = \sum_{r=0}^3 (-1)^r a^r$$

و یا این که به صورت دیگری داریم:

$$1 - a + a^2 - a^3 = \sum_{r=1}^4 (-1)^{r-1} a^{r-1}$$

(ب) ما ابتدا سری را به شکل دیگری که امکان پذیر است نشان می دهیم یعنی :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4}$$

حال جمله عمومی آن به شکل $\frac{1}{2^r} \pm$ می باشد. علامت آن مثبت است هرگاه r فرد باشد و منفی است هرگاه r زوج باشد. جمله عمومی می تواند به شکل $\frac{1}{2^r} (-1)^{r+1}$ نوشته شده و

$$\text{سری آن به صورت } \sum_{r=1}^4 (-1)^{r+1} \frac{1}{2^r}$$

مثال ۵ :

سری زیر را با نماد سیگما نمایش دهید:

$$1 \times 4 + 4 \times 7 + 7 \times 10 + 10 \times 13$$

دقت داریم که اولین عددهای، زوجهای فوق عبارتند از: ۱، ۴، ۷، ۱۰. تفاضل هریک از جمله‌ها با جمله قبل ۳ است و بنابراین مادامی که تفاضل عددی ثابت است، یک شکل خطی به صورت $ar + b$ ایجاب می‌کند.

$$r = 1, (ar + b = 1) \Rightarrow (a + b = 1)$$

$$r = 2, (ar + b = 4) \Rightarrow (2a + b = 4)$$

$$\Rightarrow (a = 3, b = -2)$$

بنابراین ما عددهای ۱، ۴، ۷، ۱۰ را با جانشین کردن $r = 1, 2, 3, 4$ در $(3r - 2)$ به دست می‌آوریم.

دومین عددهای، زوجهای فوق عبارتند از: ۴، ۷، ۱۰ و ۱۳ که دوباره دارای تفاضلی برابر با ۳ می‌باشند. با اقدامی مشابه فوق برای ما شکل $(3r + 1)$ حاصل می‌شود که با جایگذاری $r = 1, 2, 3, 4$ اعداد فوق به دست می‌آیند.

جمله عمومی سری $(3r + 1)(3r - 2)$ می‌باشد و بنابراین، سری می‌تواند به شکل زیر نوشته شود:

$$\sum_{r=1}^4 (3r - 2)(3r + 1)$$

۵.۳ تصاعدهای عددی (APs)^۱

دنباله ۲۶، ۱۱، ۸، ۵، ۲ که هر جمله آن با اضافه کردن مقدار ثابتی (در این جا عدد ۳) به جمله ماقبلش حاصل می‌شود، را در نظر می‌گیریم. به چنین دنباله‌هایی یک تصاعد عددی گفته می‌شود، که به اختصار به صورت AP نشان می‌دهیم. در حالت کلی اگر جمله اول یک تصاعد a باشد و اختلاف هر جمله از جمله ماقبلش را d در نظر بگیریم، معمولاً d را قدرنسبت می‌نامند، در این صورت اولین n جمله تصاعد عبارت است از:

$$a, (a + d), (a + 2d), \dots, [a + (n - 1)d] \quad (5.8)$$

قدرنسبت می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

1- Arithmetic Progressions

مثال ۶ :

هفتمین جمله از یک تصاعد عددی ۱۵ می باشد و دهمین جمله آن ۲۱ است.

اولین جمله و قدرنسبت و نیز n امین جمله این تصاعد را پیدا کنید.

از آن جایی که جمله هفتم، ۱۵ می باشد داریم؛ $a + 6d = 15$

از آن جایی که جمله دهم، ۲۱ می باشد داریم؛ $a + 9d = 21$

از حل این معادلات بر حسب a و d ، خواهیم داشت:

$$a = 3 \text{ و } d = 2$$

جمله n ام عبارت است از:

$$a + (n - 1)d = 3 + (n - 1)2 = 2n + 1$$

مثال ۷ :

جمله n ام از تصاعدی عددی عبارت است از: $(5 - n)$. جمله اول و قدرنسبت را بیابید.

با جایگذاری $n = 1$ جمله اول حاصل می شود:

$$n = 1 \Rightarrow a = 5 - 1 = 4$$

دومین جمله؛ $5 - 2 = 3$ می باشد و بنابراین قدرنسبت یعنی d برابر است با -1 .

با اقدام به روش دیگری، می نویسیم: $u_n = 5 - n$ ، بنابراین: $u_{n+1} = 5 - (n + 1)$

و واضح است که قدرنسبت $u_{n+1} - u_n$ یعنی:

$$u_{n+1} - u_n = [5 - (n + 1)] - (5 - n) = -1$$

مثال ۸ :

جمله هشتم یک تصاعد عددی پنج برابر جمله دوم آن است و جمله اول این تصاعد ۱

است. جمله یازدهم و قدرنسبت را بیابید.

چون؛ $a = 1$ پس جمله هشتم $(1 + 7d)$ و جمله دوم $(1 + d)$ می باشد. حال رابطه بین

این دو جمله را می نویسیم:

$$\Rightarrow [(1 + 7d) = 5(1 + d)] \Rightarrow (2d = 4) \Rightarrow d = 2$$

جمله یازدهم عبارت است از: $1 + 10d = 21$.

۵.۴ سری عددی

وقتی که جمله‌های یک تصاعد عددی با یکدیگر جمع شوند، ما یک سری عددی خواهیم داشت. با توجه به دنباله (۵.۸) ما سری زیر را به دست می‌آوریم:

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + [a + (n - 1)d] \quad (5.9)$$

که با استفاده از نماد سیگما، می‌توان آن را به صورت زیر نمایش داد:

$$\sum_{r=1}^n [a + (r - 1)d]$$

یادآوری می‌کنیم که جمله r ام برابر است با جمله اول به علاوه $(r - 1)$ ضرب در قدرنسبت که برابر است با:

$$a + (r - 1)d$$

اگر حاصل جمع سری (۵.۹) را با S_n نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + [a + (n - 1)d] \quad (5.10)$$

همچنین اگر جمله‌های این سری را از آخر به اول بنویسیم، خواهیم داشت:

$$S_n = [a + (n - 1)d] + [a + (n - 2)d] + \dots + a \quad (5.11)$$

با جمع معادلات (۵.۱۰) و (۵.۱۱)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 2S_n &= [2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1)d] + \dots + [2a + (n - 1)d] \\ &= n[2a + (n - 1)d] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1)d] \quad (5.12)$$

اگر جمله آخر سری را با L نمایش دهیم؛ داریم: $L = a + (n - 1)d$. در این صورت

کروشه معادله (۵.۱۲) به شکل $(a + L)$ نوشته می‌شود و بنابراین:

$$S_n = \frac{n}{2} (a + L) \quad (5.13)$$

یعنی: (آخرین جمله + اولین جمله) \times (تعداد جمله‌ها) $\div 2$

مثال ۹ :

مقدار سری زیر را پیدا کنید:

$$\sum_{r=1}^n r = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

در این تصاعد عددی $a = 1$ و $L = n$ بنابراین:

$$S_n = \sum_{r=1}^n r = \frac{1}{2} (n)(n+1) \quad (5.14)$$

مثال ۱۰ :

جمله r ام از یک تصاعد عددی $(1 - 6r)$ است. حاصل جمع n جمله از سری عددی متناظر با آن را بیابید:

جمله اول ($r = 1$) ۵ است.

جمله n ام $(1 - 6n)$ است.

بنابراین با توجه به معادله (۵.۱۳)؛

$$S_n = \frac{n}{2} [5 + (1 - 6n)] = \frac{n}{2} [(1 - 6n) + 5] = 3n^2 + 2n$$

مثال ۱۱ :

حاصل جمع n جمله اول یک سری به صورت $S_n = n^2 - 3n$ است. نشان دهید که جمله‌های این سری یک تصاعد عددی تشکیل می‌دهند. همچنین، جمله اول و قدرنسبت را پیدا کنید.

واضح است که اگر جمله n ام را T_n بنامیم، در این صورت :

$$(S_n = S_{n-1} + T_n) \Rightarrow (T_n = S_n - S_{n-1})$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} T_n &= n^2 - 3n - [(n-1)^2 - 3(n-1)] \\ &= n^2 - 3n - [n^2 - 5n + 4] = 2n - 4 \end{aligned}$$

که تساوی اخیر به شکل $a - d + nd$ است با $d = 2$ و $(a - d = -4)$ که با توجه به $d = 2$ داریم: $(a = -2)$.

مثال ۱۲ :

حاصل جمع سری عددی زیر را به دست آورید:

$$c + 3c + 5c + \dots$$
 تا جمله پانزدهم

در این جا جمله اول $a = c$ و قدرنسبت $d = 2c$. بنابراین؛ با توجه به (۵.۱۲):

$$S_{15} = \frac{15}{2} (2c + 14 \times 2c) = 225c$$

۵.۵ تصاعدهای هندسی (GPS)^۱

در دنباله ۲۴، ۱۲، ۶، ۳ هر جمله می تواند از ضرب جمله ماقبلش در عددی ثابت که در این جا ۲ می باشد، حاصل شود. چنین دنباله هایی یک تصاعد هندسی نامیده می شوند، که با نماد GP نمایش می دهیم. این ثابت ضربی را قدرنسبت می نامیم و معمولاً با r نمایش خواهیم داد. در حالت کلی اگر جمله اول a و قدرنسبت چنین تصاعدهایی r باشد، n جمله از این تصاعد به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$a, ar, ar^2, \dots, ar^{n-1} \quad (5.15)$$

قدرنسبت می تواند منفی یا مثبت باشد.

مثال ۱۳ :

جمله چهارم از یک تصاعد هندسی با جمله های حقیقی، ۲۴ است و جمله هفتم آن ۱۹۲ می باشد. جمله اول و قدرنسبت را بیابید. همچنین جمله n ام را پیدا کنید.

با توجه به این که جمله چهارم ۲۴ است، داریم: $ar^3 = 24$.

با توجه به این که جمله هفتم ۱۹۲ است، داریم: $ar^6 = 192$.

با تقسیم این دو معادله خواهیم داشت: $(r^3 = 8) \Rightarrow (r = 2)$

با جایگذاری در روابط قبل داریم: $(a \times 8 = 24) \Rightarrow (a = 3)$

جمله n ام عبارت است از: $ar^{n-1} = 3 \times (2)^{n-1}$

^۱ Geometric Progressions

مثال ۱۴ :

سه جمله اول تصاعد هندسی را که نخستین جمله آن ۳ و قدرنسبت آن $\frac{1}{4}$ است بنویسید.
در این جا $a = 3$ و $r = \frac{1}{4}$.
بنابراین؛ جمله اول 3^4 است، جمله دوم $3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ و جمله سوم $3 \times (\frac{1}{4})^2 = \frac{3}{16}$ می باشد.

مثال ۱۵ :

با دو فرض این که در یک تصاعد هندسی جمله سوم ۱۸ و جمله پنجم ۱۶۲ می باشد، جمله اول و قدرنسبت را بیابید.

از این که جمله سوم برابر با ۱۸ می باشد نتیجه می گیریم: $ar^2 = 18$.
از این که جمله پنجم برابر با ۱۶۲ می باشد نتیجه می گیریم: $ar^4 = 162$.
با تقسیم این دو رابطه بر هم داریم:

$$r^2 = 9 \Rightarrow r = \pm 3$$

و با توجه به جایگذاری در روابط قبل مشاهده می کنیم که در هر دو حالت داریم: $a = 2$.
بنابراین، با توجه به دو حالت ممکن برای r در یک حالت داریم:

$$a = 2, r = 3 \Rightarrow 2, 6, 18, \dots$$

و در حالت دیگر داریم:

$$a = 2, r = -3 \Rightarrow 2, -6, 18, \dots$$

مثال ۱۶ :

تعداد جمله ها را در تصاعد هندسی $\frac{1}{8}, \dots, 1, 2$ پیدا کنید.

در این جا $a = 2$ ، با توجه به این که جمله دوم ۱ است، داریم:

$$(ar = 1) \Rightarrow (2r = 1) \Rightarrow (r = \frac{1}{2})$$

جمله n ام از این تصاعد به صورت زیر حاصل می شود:

$$ar^{n-1} = 2 \times (\frac{1}{2})^{n-1} = (\frac{1}{2})^{n-2}$$

اگر:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow (n-2) = 3 \Rightarrow (n=5)$$

۵.۶ سری هندسی

وقتی که جمله‌های یک تصاعد هندسی را با یکدیگر جمع کنیم، یک سری هندسی حاصل می‌شود. سری هندسی حاصل از دنباله هندسی در (۵.۱۵) به صورت زیر است:

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \quad (5.16)$$

با استفاده از نماد سیگما، می‌توان رابطه اخیر را به صورت زیر نوشت:

$$a \sum_{p=1}^n r^{p-1}$$

اگر تعریف کنیم:

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \quad (5.17)$$

در این صورت:

$$rS_n = ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n \quad (5.18)$$

با کم کردن (۵.۱۸) از (۵.۱۷)، خواهیم داشت:

$$(1-r)S_n = a(1-r^n)$$

بنابراین و با فرض $r \neq 1$:

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} \quad (5.19)$$

اگر $r = 1$ ؛ سری به صورت $a + a + \dots + a$ خواهد بود و $S_n = na$ زمانی که $r > 1$ راحت تر است که (۵.۱۹) را معادل با شکل زیر بنویسیم:

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r - 1)} \quad (5.20)$$

زیرا صورت و مخرج هر دو مثبت خواهند بود.

مثال ۱۷ :

حاصل جمع شش جمله اول سری هندسی که جمله اول آن ۳ و جمله دوم آن ۶ است را بیابید.

در این جا $a = 3$ و $r = \frac{6}{3} = 2$. با توجه به معادله (۵.۲۰)؛

$$S_6 = \frac{3(2^6 - 1)}{2 - 1} = 189$$

مثال ۱۸ :

حاصل جمع n جمله از تصاعدهای زیر را به دست آورید:

الف) $x + x^2 + x^3 + \dots, x \neq -1$

ب) $1 - x + x^2 - x^3 + \dots, x \neq -1$

الف) این یک سری هندسی است که $a = x$ و $r = x$ جمله n ام آن x^n می باشد. با استفاده از معادله (۵.۲۰) داریم:

$$S_n = \frac{x(x^n - 1)}{x - 1} = \frac{(x^{n+1} - x)}{x - 1}$$

ب) این یک سری هندسی است که در آن $a = 1$ و $r = -x$. جمله n ام این سری $x^{n-1}(-1)^{n-1}$ می باشد. با استفاده از معادله (۵.۲۰) داریم:

$$S_n = \frac{1 + (-1)^{n+1} x^n}{1 + x}$$

مثال ۱۹ :

حاصل جمع سری هندسی زیر را بیابید:

$$1 + 4 + 16 + \dots + 1024$$

در این سری هندسی $a = 1$ و $r = 4$. جمله n ام برابر است با: 4^{n-1} . $ar^{n-1} = 4^{n-1}$

اگر جمله n ام را ۱۰۲۴ فرض کنیم داریم:

$$4^{n-1} = 1024 = 4^5 \Rightarrow n - 1 = 5 \Rightarrow n = 6$$

بنابراین؛ حاصل جمع ایجاب شده به صورت زیر است:

$$S_6 = \frac{1 \times (4^6 - 1)}{4 - 1} = \frac{4095}{3} = 1365$$

۵.۷ حاصل جمع یک سری هندسی نامتناهی

دیدیم که حاصل جمع n جمله از یک تصاعد هندسی در حالت کلی از معادله (۵.۱۹) به دست می آید:

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{(1 - r)}$$

که رابطه فوق را می توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$S_n = \frac{a}{1 - r} - \frac{ar^n}{1 - r}$$

که مشاهده می شود، کسر اول مستقل از n است. یک پرسش مهم این است: زمانی که n به صورت نامحدود صعود کند (بزرگ شود) برای حاصل جمع S_n چه اتفاقی رخ خواهد داد؟ اگر $|r| < 1$ یعنی: $-1 < r < 1$ ، در این صورت هرگاه $n \rightarrow \infty$ ، آنگاه $r^n \rightarrow 0$ و

بنابراین $\left| \frac{ar^n}{1 - r} \right|$ می تواند از هر عدد مثبت مانند ε کوچکتر در نظر گرفته شود. با

در نظر گرفتن n ای به اندازه کافی بزرگ می توان به هر اندازه آن را کوچک کرد.

در صورت وجود ما حد این حاصل جمع را توسط نماد $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ نمایش می دهیم. آن را

مجموع نامتناهی (حد مجموع) نامیده و غالباً به صورت S_∞ نشان می دهیم.

مطالب بالا ایجاب می کند که برای $|r| < 1$ ، S_∞ وجود داشته و داریم:

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r} \quad (5.21)$$

مشاهده می‌کنیم که سری $a + ar^r + ar^r + \dots$ وقتی $|r| < 1$ به $S_\infty = \frac{a}{1-r}$ همگرا می‌باشد.

اگر $|r| > 1$ ، در این صورت، هرگاه n صعود کند $|r|^n$ نیز به شکل نامحدود صعود خواهد کرد و بنابراین $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ موجود نیست. در این حالت، می‌گوییم سری واگرا است. اگر $|r| = 1$ ، در این صورت هرگاه $n \rightarrow \infty$ ، جمله‌ها تغییری نکرده و مجدداً $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ موجود نیست، یعنی سری همگرا نمی‌باشد.

مثال ۲۰:

حدّ مجموع سری هندسی زیر را بیابید:

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \dots$$

برای این سری $a = 1$ و $r = -\frac{1}{4}$. چون $|r| < 1$ ، حدّ مجموع وجود داشته و از

معادله (۵.۲۱) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S_\infty = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$$

مثال ۲۱:

حد مجموع یک سری هندسی ۴ برابر جمله اول است. قدرنسبت را پیدا کنید. با توجه به معادله (۵.۲۱)، یعنی: $S_\infty = \frac{a}{1-r}$ و از آن جایی که $S_\infty = 4a$ داریم:

$$\left(\frac{a}{1-r} = 4a \right) \Rightarrow \left(1-r = \frac{1}{4} \right) \Rightarrow \left(r = \frac{3}{4} \right)$$

مثال ۲۲:

حدّ مجموع سری هندسی زیر را بیابید:

$$a - \frac{a^r}{b} + \frac{a^r}{b^r} - \dots, \quad \left| \frac{a}{b} \right| < 1$$

با توجه به معادله (۵.۲۱)، و این که جمله اول a و قدرنسبت $-\frac{a}{b}$ می‌باشد، داریم:

$$S_\infty = \frac{a}{1 + a/b} \Rightarrow S_\infty = \frac{ab}{b + a}$$

مثال ۲۳ :

به ازای چه مقادیری برای x ، سری هندسی زیر همگرا است؟

$$1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots$$

قدر نسبت $2x$ می باشد و سری همگرا است در صورتی که داشته باشیم:

$$(|2x| < 1) \Rightarrow (|x| < \frac{1}{2}) \Rightarrow (-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2})$$

۵.۸ سری دو جمله ای

براحتی می توان نشان داد که $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$. هرگاه متوالیاً، $(1+x)$ را در

آن ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$$

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

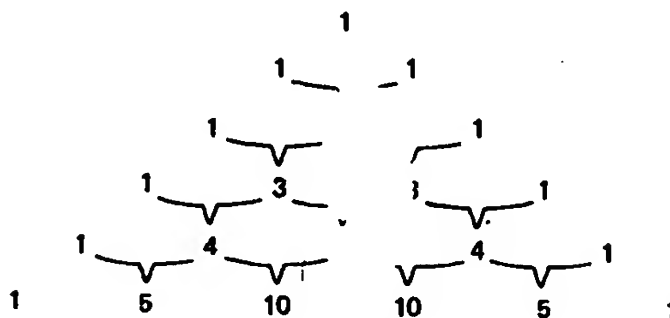
$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$

اگر خاطر نشان شویم که

$$(1+x)^0 = 1, (1+x)^1 = 1+x$$

مشاهده می کنیم که الگویی برای ضرایب موجود است. این الگو به شایسته ترین وجه در

مثلث پاسکال نمایش داده شده است (شکل ۵.۱).



شکل ۵.۱

مطالعه این مثلث به ما این نتیجه را القا می‌کند که

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!}x^r + \dots + x^n \quad (5.22)$$

که $n \in \mathbb{N}$ ، یعنی، n عددی صحیح و مثبت است که مطلب فوق در فصل قبل به استقرا ثابت شده است (صفحه ۸۰).

استفاده از معادله (۵.۲۲)، این امکان را به ما می‌دهد که برای $n \in \mathbb{N}$ ، بسط دوجمله‌ای $(a+x)^n$ را به دست بیاوریم:

$$(a+x)^n = \left[a\left(1 + \frac{x}{a}\right)\right]^n = a^n \left(1 + \frac{x}{a}\right)^n$$

$$= a^n \left[1 + n\left(\frac{x}{a}\right) + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} \left(\frac{x}{a}\right)^r + \dots + \left(\frac{x}{a}\right)^n\right]$$

بنابراین:

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \dots +$$

$$\frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}x^r + \dots + x^n \quad n \in \mathbb{N} \quad (5.23)$$

عبارت $\frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!}$ معمولاً توسط $\binom{n}{r}$ نمایش داده می‌شود، ولی

گاهی اوقات توسط nC_r یا ${}_nC_r$ نیز نمایش داده می‌شود، بنابراین:

$$\binom{n}{1} = n \text{ و } \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2!} \text{ و } \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

با ضرب صورت و مخرج کسر در $(n-r)!$ خواهیم داشت:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

این فرم متقارنی است که غالباً مورد استفاده قرار می‌گیرد.

تحقیق این موضوع که اگر n عددی صحیح و مثبت نباشد، چه اتفاقی می افتد، سودمند است. در این حالت سری زیر نشان دهنده یک سری دوجمله‌ای نامحدود است.

$$1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots \quad (5.24)$$

مطلب فوق می تواند دو نکته زیر را گوشزد کند:

- (۱) سری نامتناهی (۵.۲۴) دارای حد مجموع است زمانی که $|x| < 1$ اما اگر $|x| > 1$ ، سری دوجمله‌ای نامتناهی فوق حد مجموع ندارد.
- (۲) اگر حد مجموع موجود باشد، مقدار آن برابر است با $(1+x)^n$.

مثال ۲۴ :

دو جمله‌ای $(x + \frac{1}{x})^5$ را بسط دهید.

ما از معادله (۵.۲۳) در حالت $a = \frac{1}{x}$ و $n = 5$ استفاده کرده و داریم:

$$\begin{aligned} (x + \frac{1}{x})^5 &= x^5 + 5x^3 \frac{1}{x} + \frac{5 \times 4}{1 \times 2} x^2 \frac{1}{x^2} + \frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} x^1 \frac{1}{x^3} + \\ &\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3 \times 4} x \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} \\ &= x^5 + 5x^2 + 10x + \frac{10}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^5} \end{aligned}$$

مثال ۲۵ :

ضریب x^2 را در بسط دو جمله‌ای $(2x + 5)^6$ محاسبه کنید.

ابتدا می نویسیم:

$$(2x + 5)^6 = 5^6 [1 + \frac{2x}{5}]^6$$

جمله شامل x^2 را می توان با استفاده از مثلث پاسکال یا معادله (۵.۲۲) به دست آورد. در

این صورت خواهیم داشت:

$$5^6 \times 15 \times (\frac{2x}{5})^2 = 6000 x^2$$

مثال ۲۶ :

دوجمله‌ای $(1-x)^{\frac{1}{2}}$ را بر حسب توانهای صعودی x و تا جمله شامل x^2 بسط دهید.
با توجه به (۵.۲۴) داریم:

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}(-x)^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}(-x)^3 + \dots = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \dots$$

مثال ۲۷ :

ضریب x^n را در بسط دوجمله‌ای $(1+2x)^{-2}$ به دست آورید.
ما حکم مسأله را برای جمله‌های با ضرایب پایتتر به دست آورده و این الگویی خواهد شد برای این که بتوانیم جمله عمومی را محاسبه کنیم. با استفاده از رابطه (۵.۲۴)، داریم:

$$(1+2x)^{-2} = 1 - 2(2x) + \frac{(-2)(-3)}{2!}(2x)^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}(2x)^3 + \dots + \frac{(-2)(-3)(-4)\dots[-(n+2)]}{n!}(2x)^n + \dots$$

ضریب x^2 عبارت است از:

$$\frac{2 \times 3}{2!} \times 2^2 = 2 \times 3 \times 2$$

ضریب x^3 عبارت است از:

$$(-1) \frac{2 \times 3 \times 4}{3!} \times 2^3 = (-1) \times 4 \times 3 \times 2 \times 2$$

ضریب x^n عبارت است از:

$$(-1)^n \frac{2 \times 3 \times 4 \times \dots (n+2)}{n!} \times 2^n$$

اگر صورت و مخرج کسر اخیر را در ۲ ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$(-1)^n \frac{(n+2)!}{2 \times n!} 2^n = (-1)^n (n+2)(n+1) 2^{n-1}$$

مثال ۲۸ :

هرگاه x با یک واحد کوچک سنجیده شده باشد، نشان دهید که تساوی زیر برقرار بوده و جمله‌های از x^2 و توانهای بالاتر از آن قابل صرف نظر و چشم‌پوشی می‌باشد:

$$\sqrt{\left(\frac{2-x}{2+x}\right)} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{x^2}{8}$$

ابتدا می‌نویسیم:

$$\sqrt{\left(\frac{2-x}{2+x}\right)} = \sqrt{\left[\frac{\left(1-\frac{x}{2}\right)}{\left(1+\frac{x}{2}\right)}\right]} = \left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1+\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

با استفاده از (۵.۲۴) داریم:

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)}{2!} \left(-\frac{x}{2}\right)^2 - \dots =$$

$$1 - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{32} + \dots \quad \left(1+\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right) +$$

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right)}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \dots = 1 - \frac{x}{4} + \frac{3x^2}{32} + \dots$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{2-x}{2+x}\right)} = \left(1 - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{32} + \dots\right) \left(1 - \frac{x}{4} + \frac{3x^2}{32} + \dots\right)$$

$$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \dots$$

به طریق دیگر با توجه به این که $\sqrt{\left(\frac{2-x}{2+x}\right)} = \frac{2-x}{\sqrt{(4-x^2)}}$ با بسط مخرج کسر

می توانیم این نتیجه را به دست آوریم. بسطهای فوق فقط زمانی اعتبار دارند که $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$ یعنی: $|x| < 2$.

مثال ۲۹:

اگر x از x^2 کوچکتر و توانهای بالاتر قابل صرف نظر باشند، نشان دهید که:

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x$$

ما ابتدا برای نوشتن بسط کسر فوق از کسرهای جزئی استفاده کرده و آن را به صورت جمع دو جمله $\frac{a}{(x-1)}$ و $\frac{b}{(x-2)}$ می نویسیم. با عمل به آنچه در فصل ۲ گذشت، درمی یابیم که

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} \equiv \frac{1}{3} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right]$$

حال داریم:

با استفاده از (۵.۲۴)

$$\frac{1}{x-1} = \frac{-1}{1-x} = -1(1-x)^{-1} = -1(1+x+\dots)$$

همچنین داریم: با استفاده از (۵.۲۴)

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}+\dots\right)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-1)(x+2)} &= \frac{1}{3} \left[-(1+x+\dots) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{2} + \dots\right) \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[-\frac{3}{2} - \frac{3}{4}x + \dots \right] = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x \end{aligned}$$

(طبق فرض جمله های از x^2 به بالا قابل صرف نظر بوده است.)

۵.۹ چند سری متناهی دیگر

حاصل جمع اولین n عدد طبیعی:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{r=1}^n r$$

به وضوح یک حاصل جمع از یک سری حسابی را مشخص می‌کند. مقدار آن $\frac{1}{2}n(n+1)$ محاسبه خواهد شد. حاصل جمعهای متناهی دیگری نظیر، توانهای عددی طبیعی نیز وجود دارند.

یک روش سودمند برای محاسبه چنین حاصل جمعهایی روش تفاضلها نامیده می‌شود. در مشاهده‌های زیر از این روش استفاده خواهد شد. فرض کنیم، تمایل داریم که مقدار $S_n = \sum_{r=1}^n u_r$ را که در آن $u_r = f(r+1) - f(r)$ می‌باشد، به دست آوریم، در این رابطه f هر تابعی می‌تواند باشد. در این صورت:

$$S_n = [f(2) - f(1)] + [f(3) - f(2)] + \dots + [f(n+1) - f(n)]$$

با در نظر گرفتن مقادیر حذف شده در عبارت فوق خواهیم داشت:

$$S_n = f(n+1) - f(1)$$

مثال ۳۱:

فرض کنیم $f(r) = r^2$. در این صورت:

$$\sum_{r=1}^n [(r+1)^2 - r^2] = (n+1)^2 - 1$$

از طرفی:

$$(r+1)^2 - r^2 \equiv r^2 - 2r + 1 - r^2 \equiv (2r + 1)$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n [2r + 1] &= (n+1)^2 - 1 \Rightarrow (2 \sum_{r=1}^n r) + n = (n^2 + 2n + 1) - 1 \\ \Rightarrow \sum_{r=1}^n r &= \frac{1}{2} (n^2 + n) = \frac{n}{2} (n+1) \end{aligned}$$

مثال ۳۲ :

فرض کنیم؛ $f(r) = r^r$ در این صورت:

$$\sum_{r=1}^n [(r+1)^r - r^r] = (n+1)^r - 1$$

از طرفی:

$$(r+1)^r - r^r \equiv r^r + r r^{r-1} + r r^{r-2} + \dots + 1 - r^r \equiv r r^{r-1} + r r^{r-2} + \dots + 1 ,$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n (r r^{r-1} + r r^{r-2} + \dots + 1) &= (n+1)^r - 1 \Rightarrow \left(r \sum_{r=1}^n r^{r-1} \right) + \left(r \sum_{r=1}^n r^{r-2} \right) + \dots + n \\ &= (n+1)^r - 1 \end{aligned}$$

با استفاده از نتیجه حاصل برای $\sum_{r=1}^n r$ در بالا، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} r \sum_{r=1}^n r^{r-1} &= (n+1)^r - (n+1) - \frac{r}{2} n (n+1) \\ &= (n+1) \left[(n+1)^r - 1 - \frac{r}{2} n \right] = (n+1) \left(n^r + \frac{1}{2} n \right) \\ &= (n+1) \frac{n}{2} (2n+1) \Rightarrow \sum_{r=1}^n r^r = \frac{n}{2} (n+1) (2n+1) \end{aligned}$$

برای تکمیل و تمامیت موضوع متذکر می‌شویم که

$$\sum_{r=1}^n r^r = \frac{1}{2} n^r (n+1)^r$$

که با در نظر گرفتن $f(r) = r^r$ (و مشابه با آنچه در قبل گذشت) می‌توان تساوی فوق را به دست آورد.

نتایج فوق در $\sum_{r=1}^n r$ ، $\sum_{r=1}^n r^r$ و $\sum_{r=1}^n r^r$ می‌تواند مورد استفاده قرار بگیرد. برای محاسبه

$\sum_{r=1}^n g(r)$ که $g(r)$ هر چند جمله‌ای درجه سوم بر حسب r می‌باشد.

مثال ۳۳ :

مقدار $S_9 = \sum_{r=1}^9 (r^2 + 2r + 1)$ را به دست آورید.

می توانیم بنویسیم:

$$S_9 = \sum_{r=1}^9 r^2 + 2 \sum_{r=1}^9 r + \sum_{r=1}^9 1$$

با استفاده از نتایج بالا؛

$$S_9 = \frac{1}{6} \times 9^3 \times 10^2 + 2 \times \frac{9}{2} \times 10 + 9 = 2124$$

باعث تأسف است که از این نتایج هیچ الگویی برای $\sum_{r=1}^n r^k$ ، زمانی که k عددی طبیعی

باشد، ظاهر نمی شود. با این وجود، رشته دیگری از نتایج قابل حصول، استفاده از $f(r)$ ، در شکلهای $r(r-1)$ ، $r(r+1)$ و $r(r+1)(r+2)$ می باشد. ما حالت اول را به عنوان یک مثال در نظر گرفته و بقیه حالتها را به عنوان تمرین وامی گذاریم.

مثال ۳۴ :

هرگاه $u_r = f(r+1) - f(r)$ که $f(r) = r(r-1)$ در این صورت، $\sum_{r=1}^n u_r$ را

محاسبه کرده و سپس $\sum_{r=1}^n r$ را به دست آورید.

با توجه به فرض داریم:

$$\sum_{r=1}^n u_r = \sum_{r=1}^n [f(r+1) - f(r)] = f(n+1) - f(1) = (n+1)n$$

از طرفی؛

$$f(r+1) - f(r) = r(r+1) - (r-1)r = r^2 + r - r^2 + r = 2r$$

بنابراین:

$$\left[2 \sum_{r=1}^n r = (n+1)n \right] \Rightarrow \left[\sum_{r=1}^n r = \frac{n}{2} (n+1) \right]$$

تمرین ۵:

۱- پنج جمله اول را در هریک از دنباله‌های زیر که جمله عمومی آنها داده شده بنویسید.

الف) $2r - 3$ (ب) $\frac{r}{r+1}$ (ج) $(-1)^r r^2$

۲- در دنباله‌های زیر که با جمله عمومی u_r مشخص شده‌اند بر حسب n های داده شده دنباله‌ای متناهی تشکیل دهید.

الف) $u_r = 2r + 3, n = 4$

ب) $u_r = \frac{1}{r^2}, n = 6$

ج) $u_r = \frac{1}{r(r+2)}, n = 3$

۳- سریهای زیر را بسط دهید:

الف) $\sum_{r=1}^4 2r$ (ب) $\sum_{r=-2}^3 3^r$ (ج) $\sum_{r=-2}^5 (-1)^r \frac{2}{r}$

۴- سریهای زیر را توسط نماد سیگما نشان دهید:

الف) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$

ب) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$

ج) $1 - 4 + 9 - 16 + 25$

د) $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4$

۵- جمله نهم یک تصاعد حسابی ۱۵ و جمله چهارم آن ۴۰ است. جمله اول و قدرنسبت این تصاعد را بیابید.

۶- جمله n ام یک تصاعد حسابی $(3n - 4)$ می‌باشد. جمله اول و قدرنسبت این تصاعد را بیابید.

۷- جمله هفتم یک تصاعد حسابی ۴ برابر جمله دوم آن است و جمله اول آن ۲ می‌باشد. قدرنسبت و جمله دهم این تصاعد را بیابید.

۸- حاصل جمع سری حسابی زیر را به دست آورید:

$$1 + 5 + 9 + 13 + \dots + 49$$

۹- مقدار سری $\sum_{r=1}^n (2r - 1)$ را محاسبه کنید.

۱۰- حاصل جمع n جمله اول یک سری، برابر است با $4n^2 - 3n^2$. نشان دهید که جمله های این سری یک تصاعد حسابی تشکیل می دهند. جمله اول و قدرنسبت را پیدا کرده و جمله چهارم را مشخص کنید.

۱۱- جمله ششم از یک تصاعد هندسی ۸ و جمله سوم آن ۱ است. جمله اول و قدرنسبت این تصاعد را پیدا کرده و جمله n ام آن را تشکیل دهید.

۱۲- در یک تصاعد هندسی نخستین جمله ۱ و قدرنسبت ۲- می باشد، ۴ جمله اول این تصاعد را تشکیل دهید.

۱۳- اگر قدرنسبت در یک تصاعد هندسی منفی بوده و جمله سوم آن ۲ و جمله هفتم آن $\frac{1}{8}$ باشد، جمله اول و قدرنسبت را بیابید.

۱۴- در تصاعد هندسی زیر تعداد جمله ها را پیدا کنید:

$$3, -6, \dots, -96$$

۱۵- جمله n ام یک تصاعد هندسی $\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ می باشد. جمله اول و جمله چهارم این تصاعد را بیابید.

۱۶- در سری هندسی زیر حاصل جمع شش جمله اول را پیدا کنید:

$$1 + 3 + 9 + \dots$$

۱۷- حاصل جمع n جمله از سری هندسی زیر را بیابید:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

۱۸- حد مجموع هریک را پیدا کنید:

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots \quad \text{الف)}$$

$$1 - x + x^2 - \dots \quad \text{ب)}$$

۱۹- حد مجموع یک تصاعد هندسی ۵ برابر جمله اول آن است. قدرنسبت این تصاعد را بیابید.

۲۰- دو جمله ای $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^4$ را بسط دهید.

۲۱- ضریب x^2 را در بسط دو جمله ای $(3 - 2x)^4$ به دست آورید.

۲۲- عبارت $\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)}}$ را به صورت یک سری صعودی بر حسب توانهای x بسط دهید.

۲۳- عبارت $\frac{1+2x}{1-2x}$ را به صورت یک سری صعودی بر حسب توانهای x بسط داده و

ضرب x^n را پیدا کنید.

۲۴- فرض کنیم که x بسیار کوچکتر از x^2 بوده و مقادیر حاصل از توانهای بالاتر از آن قابل صرف نظر کردن باشد، در این صورت نشان دهید که

$$\frac{1}{(1+3x)(1-2x)} = 1 - x + 7x^2 - 13x^3 + \dots$$

آیا برای هر حوزه از مقادیر x بسط فوق صحیح است؟

۲۵- هرگاه x در مقایسه با واحد بسیار کوچک باشد، نشان دهید که جمله‌های از x^2 به بالا (x^2 و توانهای بالاتر از آن) ممکن است قابل صرف نظر باشند و،

$$\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots$$

آیا برای هر حوزه از مقادیر x بسط فوق صحیح است؟

۲۶- با فرض $f(r) = r^2$ و با استفاده از روش تفاضلهای، نشان دهید که

$$\sum_{r=1}^n r^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)$$

۲۷- نشان دهید که

$$\sum_{r=1}^n (r^2 - r) = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)(n-1)$$

۲۸- با فرض $f(r) = (r-1)r(r+1)$ و با استفاده از روش تفاضلهای نشان دهید که

$$\sum_{r=1}^n r(r+1) = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)(n+3)$$

۲۹- با فرض $f(r) = (r-1)r(r+1)(r+2)$ و با استفاده از روش تفاضلهای نشان دهید که:

$$\sum_{r=1}^n r(r+1)(r+2) = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

نابرابریها*

۶.۱ نابرابریهای خطی

نابرابری « x بزرگتر از y است» با نماد $x > y$ نوشته شده و به معنی این است که $x - y$ مقداری مثبت است. به طریق مشابه « x کوچکتر از y است» به صورت $x < y$ نوشته شده و به معنی این است که $x - y$ مقداری منفی می باشد.

$$(x > y) \iff (x - y > 0)$$

$$(x < y) \iff (x - y < 0)$$

اگر x بزرگتر یا مساوی با y باشد در این صورت می نویسیم: $x \geq y$ و به طریق مشابه نماد $x \leq y$ برای x کوچکتر یا مساوی با y به کار می رود.

قاعده‌های اساسی برای تغییر و دستکاری نابرابریها به قرار زیرند:

(۱) می توان به دو طرف یک نابرابری یک عدد یکسان (مساوی) اضافه کرد. به صورت

زیر:

$$(x > y) \Rightarrow (x + a > y + a)$$

(۲) از دو طرف یک نابرابری می توان یک عدد یکسان کم کرد، به صورت زیر:

$$(x > y) \Rightarrow (x - b > y - b)$$

(۳) اگر دو طرف یک نابرابری را در یک عدد مثبت ضرب کنیم، نابرابری حفظ می شود

(جهت آن تغییر نمی کند).

* در این بخش تمامی مقادیر حقیقی هستند (یعنی متعلق به \mathbb{R})

$$(x > y, a > 0) \Rightarrow (ax > ay)$$

(۴) اگر دو طرف یک نابرابری در یک عدد منفی ضرب شود، نابرابری حفظ نمی شود (جهت آن عوض می شود).

$$(x > y, a < 0) \Rightarrow (ax < ay)$$

(۵) طرفین متناظر در نامساویهای همجهت را می توان با هم جمع کرد (در مورد تفریق حکم کلی نیست).

$$(a > b, x > y) \Rightarrow (a + x > b + y)$$

(۶) در نامساویها خاصیت تعدی یا تراگذاری برقرار است.

$$(x > y, y > z) \Rightarrow (x > z)$$

مثال ۱ :

فرض کنیم که $x > y$ ، نشان دهید $x + a > y + a$.

با توجه به این که $(x - y > 0) \Leftrightarrow (x > y)$ می توانیم بنویسیم:

$$x - y = (x + a) - (y + a)$$

$$\Rightarrow (x + a) - (y + a) > 0 \Leftrightarrow x + a > y + a$$

بنابراین:

$$x > y \Leftrightarrow (x + a > y + a)$$

مثال ۲ :

فرض کنید؛ $x > y$ و $b < 0$ ، نشان دهید $bx < by$.

$$(x - y > 0) \Leftrightarrow (x > y) \text{ می دانیم}$$

از آن جا که $b < 0$ پس $b(x - y)$ مقداری است منفی. اما داریم:

$$b(x - y) = bx - by < 0 \Rightarrow bx < by$$

مثال ۳ :

فرض کنید؛ $x > y$ و $a > b$ ، نشان دهید $a + x > b + x$.

$$(x > y) \Rightarrow (x - y > 0)$$

$$(a > b) \Rightarrow (a - b > 0)$$

بنابراین:

$$(x - y) + (a - b) > 0$$

$$\Rightarrow (x + a) - (y + b) > 0 \Rightarrow (x + a) > (y + b)$$

مثال ۴:

اگر فرض کنیم $a > b$ ، راجع به رابطه بین a' و b' چه می توان گفت؟
ما نیاز داریم که سه حالت مجزا از یکدیگر و برحسب علامتهای a و b را در نظر بگیریم.
(الف) a و b هر دو مثبت باشند.

$$(a > b) \Rightarrow (a' > ab) \text{ با ضرب دو طرف در } a$$

$$(a > b) \Rightarrow (ab > b') \text{ با ضرب دو طرف در } b$$

با ترکیب دو رابطه اخیر داریم:

$$(a' > ab \text{ و } ab > b') \Rightarrow (a' > b')$$

(ب) a و b هر دو منفی باشند.

$$(a > b) \Rightarrow (a' < ab) \text{ با ضرب دو طرف در } a \text{ که مقداری منفی است}$$

$$(a > b) \Rightarrow (ab < b') \text{ با ضرب دو طرف در } b \text{ که مقداری منفی است}$$

از ترکیب این روابط خواهیم داشت:

$$(a' < ab < b') \Rightarrow (a' < b')$$

(ج) در حالتی که a مثبت و b منفی باشد، چیزی نمی توانیم بگوییم. به عنوان مثال:

$$4 > -2 \text{ و } 4' > (-2)'$$

$$4 > -6 \text{ و } 4' < (-6)'$$

اما:

مثال ۵:

مجموعه مقادیری را برای x بیابید که به ازای آنها نابرابری $2x + 2 > 6$ برقرار باشد

(مجموعه جواب نابرابری را مشخص کنید):

$$\begin{array}{l} \text{ضرب دو طرف در } \frac{1}{x} \\ \text{تفریق ۲ از طرفین} \end{array} \quad (2x + 2 > 6) \Rightarrow (2x > 6 - 2 = 4), \Rightarrow x > 2$$

بنابراین مجموعه جواب عبارت است از: $\{x: x > 2\}$

مثال ۶:

مجموعه جواب نامعادله $\frac{3+4x}{x} < 3$ را بیابید.
(الف) وقتی که $x > 0$

$$\begin{aligned} \left(\frac{3+4x}{x} < 3\right) &\Rightarrow (3+4x < 3x) \\ &\Rightarrow (4x - 3x < -3) \Rightarrow x < -3 \end{aligned}$$

که در این حالت با شرط $x > 0$ تناقض ایجاد می شود و مجموعه جواب نمی تواند شامل مقادیر مثبت باشد.

(ب) وقتی که $x < 0$

$$\left(\frac{3+4x}{x} < 3\right) \Rightarrow (3+4x > 3x)$$

(وقتی دو طرف یک نابرابری در یک عدد منفی ضرب شود جهت نابرابر معکوس می شود)

$$3 + 4x > 3x \Rightarrow x > -3$$

بنابراین: مجموعه جواب عبارت است از: $\{x: -3 < x < 0\}$

۶.۲ نابرابریهای درجه دوم

هر نابرابری به شکل $ax^2 + bx + c \geq 0$ که در آن، $a \neq 0$ ، یک نابرابری درجه دوم نامیده می شود. حل چنین نابرابریهایی بستگی به علامت مبین آن یعنی $(b^2 - 4ac)$ دارد.

(۱) اگر $b^2 < 4ac$ ، در این صورت:

برای هر مقدار x در حالتی که $a > 0$ ، همواره داریم: $ax^2 + bx + c \geq 0$ و

برای هر مقدار x در حالتی که $a < 0$ ، همواره داریم: $ax^2 + bx + c \leq 0$.
 نتایج فوق با توجه به کاری که در بخش ۳ انجام شد، به دست آمده است.
 (۲) اگر $b^2 > 4ac$ ، در این صورت معادله $ax^2 + bx + c = 0$ دارای ۲ ریشه متمایز و حقیقی است. اگر این ریشه‌ها را α و β بنامیم و $\beta > \alpha$ ، در این صورت:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

که به دنبال آن خواهیم داشت:

	$x - \alpha$	$x - \beta$	$(x - \alpha)(x - \beta)$
$x < \alpha$	-	-	+
$\alpha < x < \beta$	+	-	-
$x > \beta$	+	+	+

حال با توجه به جدول فوق نابرابری درجه دوم را در دو حالت بررسی می‌کنیم

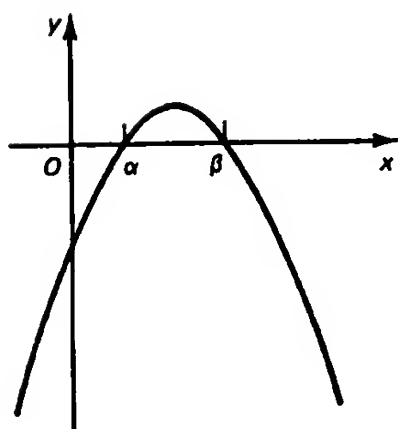
(الف) برای $a > 0$:

اگر $x < \alpha$ و یا $x > \beta$ ، در این صورت؛ $ax^2 + bx + c > 0$.

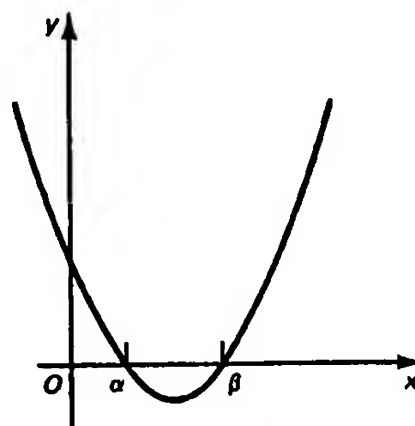
و اگر $\alpha < x < \beta$ ، در این صورت؛ $ax^2 + bx + c < 0$.

(ب) برای $a < 0$:

اگر $\alpha < x < \beta$ ، در این صورت؛ $ax^2 + bx + c > 0$.



(ب)



(الف)

شکل ۶.۱

اگر $x < \alpha$ و یا $x > \beta$ ، در این صورت؛ $ax^2 + bx + c < 0$.
 با توجه به نمودار $y = ax^2 + bx + c$ ، نتایج فوق براحتی قابل حصول می‌باشند.
 دو حالت (الف) و (ب) در شکل ۶.۱ نشان داده شده است.

مثال ۷:

مجموعه جواب نابرابری $2x^2 - 3x - 2 > 0$ را بیابید.
 در این مثال $a = 2$ ، $b = -3$ و $c = -2$ ، بنابراین $b^2 > 4ac$. سمت چپ نابرابری را
 می‌توان تجزیه کرد که در این صورت داریم: $(2x + 1)(x - 2) > 0$. به علاوه برای مثبت
 بودن سمت چپ می‌بایست، $(2x + 1)$ و $(x - 2)$ هم علامت باشند.

$$(x > 2 \text{ و } x > -\frac{1}{2}) \Rightarrow (x > 2) \quad \text{الف)}$$

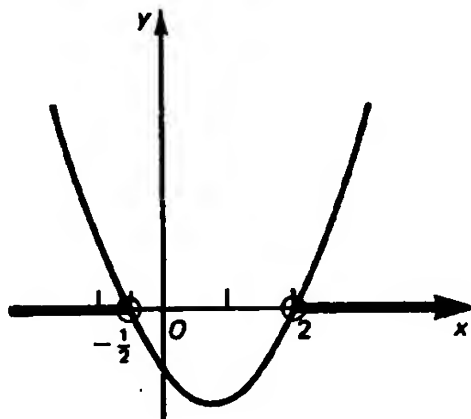
در این حالت شرط ایجاب شده عبارت است از: $x > 2$.

$$(x < 2 \text{ و } x < -\frac{1}{2}) \Rightarrow (x < -\frac{1}{2}) \quad \text{ب)}$$

در این حالت شرط به دست آمده عبارت است از: $x < -\frac{1}{2}$.
 بنابراین مجموعه جواب عبارت است از:

$$\{x: x < -\frac{1}{2}\} \cup \{x: x > 2\}$$

اگر ما منحنی $y = (2x + 1)(x - 2)$ را رسم کنیم (شکل ۶.۲ را مشاهده کنید)،
 براحتی ملاحظه می‌شود که ناحیه مشخص شده مجموعه جواب را به ما می‌دهد.



شکل ۶.۲

مثال ۸ :

مجموعه جواب نابرابری $\frac{3x+1}{x-1} < 2$ را بیابید.

اگر دو طرف این نابرابری را در $(x-1)$ ضرب کنیم، مخرج کسر حذف می‌شود، که در این صورت ما می‌بایست دو حالت مجزا را در نظر بگیریم؛ یکی $(x-1) > 0$ و دیگری $(x-1) < 0$. در این وضعیت بهتر است طرفین را در $(x-1)^2$ که همواره مثبت است ضرب کنیم، البته به شرطی که $x \neq 1$. اگر $x = 1$ ، سمت چپ نابرابری تعریف نشده است. با ضرب طرفین در $(x-1)^2$ ، خواهیم داشت:

$$[(3x+1)(x-1) < 2(x-1)^2]$$

$$\Rightarrow [3x^2 - 2x - 1 < 2x^2 - 4x + 2]$$

$$\Rightarrow [x^2 + 2x - 3 < 0]$$

$$\Rightarrow [(x+3)(x-1) < 0]$$

برای برقرار بودن نابرابری اخیر، می‌بایست $(x+3)$ و $(x-1)$ مختلف‌العلامه باشند.

$$(\text{الف}) [(x+3) > 0 \text{ و } (x-1) < 0]$$

$$\Rightarrow [x > -3 \text{ و } x < 1] \Rightarrow (-3 < x < 1)$$

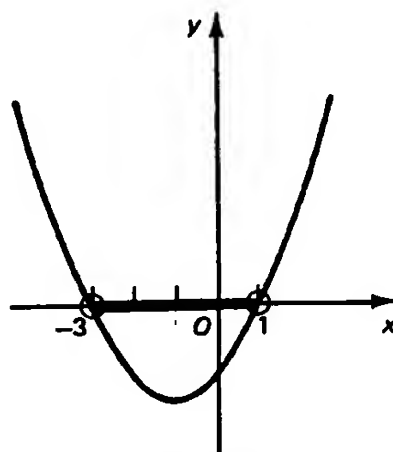
$$(\text{ب}) [(x+3) < 0 \text{ و } (x-1) > 0]$$

$$\Rightarrow (x < -3 \text{ و } x > 1)$$

در حالت (ب) مقداری برای x یافت نمی‌شود که در هر دو شرط صدق کند. بنابراین

مجموعه جواب عبارت است از: $\{x : -3 < x < 1\}$

اگر ما منحنی $y = x^2 + 2x - 3$ را در نظر بگیریم نتیجه فوق برآحتی و با توجه به شکل ۶.۳، قابل استنتاج است.



شکل ۶.۳

۶.۳ نابرابریهای شامل قدرمطلق

نماد $|x|$ ، قدرمطلق x نامیده می شود که به صورت زیر تعریف می شود:

$$|x| = x \quad \text{وقتی که } x \geq 0$$

$$|x| = -x \quad \text{وقتی که } x < 0$$

با توجه به تعریف فوق برای هر مقدار x داریم: $|x|^2 = x^2$

اگر فرض کنیم که $c > 0$ و $|ax + b| > c$ ، با توجه به مطالب قبل داریم:

$$[(ax + b)^2 > c^2 \quad \text{برای هر } x] \Rightarrow [a^2x^2 + 2abx + (b^2 - c^2) > 0]$$

نابرابری اخیر یک نابرابری درجه دوم است که با توجه به روشهای توصیف شده در صفحه های قبل قابل حل است.

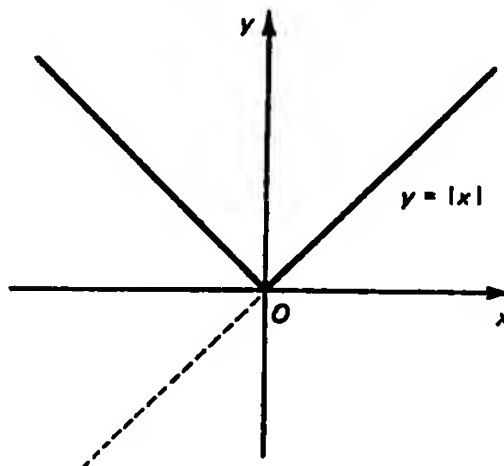
مثال ۹:

مجموعه جواب نابرابری $|x + 1| > 1$ را بیابید.

$$[|x + 1| > 1] \Rightarrow [|x + 1|^2 > 1] \Rightarrow [(x + 1)^2 > 1]$$

$$\Rightarrow [|x^2 + 2x| > 0] \Rightarrow [x(x + 2) > 0]$$

$$(x > 0 \text{ و } x + 2 > 0) \Rightarrow (x > 0 \text{ و } x > -2) \quad (\text{الف})$$



شکل ۶.۴

بنابراین، در این حالت خواهیم داشت: $x > 0$.

$$(x < 0 \text{ و } x + 2 < 0) \Rightarrow (x < 0 \text{ و } x < -2) \quad (\text{ب})$$

بنابراین، در این حالت داریم: $x < -2$.

مجموعه جواب به صورت زیر است:

$$\{x: x < -2\} \cup \{x: x > 0\}$$

نابرابریهای شامل قدر مطلق ممکن است با توجه به نمودارشان تعبیر شوند (تعبیر نموداری). نمودار $y = |x|$ براحتی قابل رسم است، زمانی که $y = x$ ، $x > 0$ و وقتی که $y = -x$ ، $x < 0$ (شکل ۶.۴ را مشاهده کنید).

برای به دست آوردن نمودار $y = |ax + b|$ ، در حالتی که $a > 0$ ، ابتدا معادله $y = ax + b$ را در نظر می گیریم.

اگر $y = 0$ آنگاه $x = -\frac{b}{a}$. بنابراین:

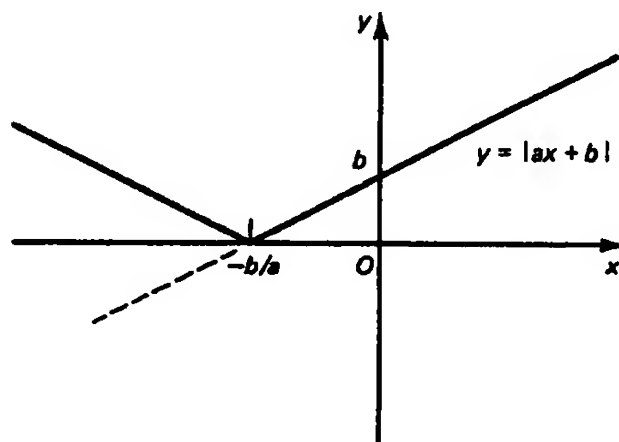
$$|ax + b| = ax + b \quad \text{برای} \quad x > -\frac{b}{a}$$

$$|ax + b| = -(ax + b) \quad \text{برای} \quad x < -\frac{b}{a}$$

نمودار $y = |ax + b|$ برای حالتی که $a > 0$ و $b > 0$ در شکل ۶.۵ نشان داده شده

است.

از روی شکل مشخص است که سمت چپ نقطه $x = -\frac{b}{a}$ نمودار از انعکاس قسمتی از خط $y = ax + b$ نسبت به محور x ها، حاصل شده است.

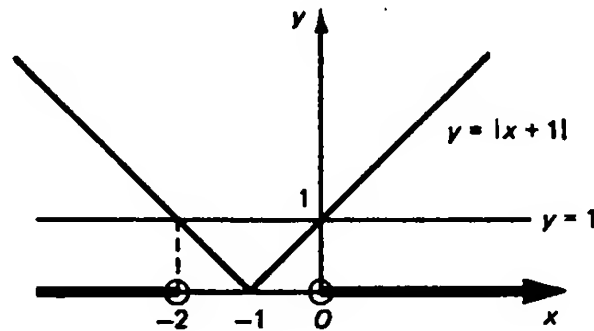


شکل ۶.۵

مثال ۱۰ :

با یک تعبیر نموداری (از روی نمودار) مجموعه جواب نابرابری $|x + 1| > 1$ را بیابید. نمودارهای $y = |x + 1|$ و $y = 1$ را رسم می‌کنیم (شکل ۶.۶ را مشاهده کنید). این نمودارها یکدیگر را در نقاطی به طول $x = 0$ و $x = -2$ قطع می‌کنند. واضح است که نمودار $y = |x + 1|$ در خارج از ناحیه $-2 \leq x \leq 0$ ، بالای نمودار $y = 1$ قرار دارد. بنابراین مجموعه جواب به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$\{x: x < -2\} \cup \{x: x > 0\}$$



شکل ۶.۶

مثال ۱۱ :

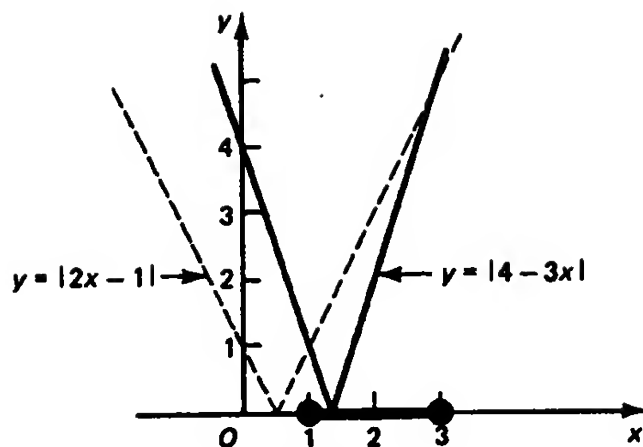
مجموعه جواب نامعادله $|4 - 3x| \leq |2x - 1|$ را بیابید:

$$\begin{aligned} [|4 - 3x| \leq |2x - 1|] &\Rightarrow [|4 - 3x|^2 \leq |2x - 1|^2] \\ &\Rightarrow [(4 - 3x)^2 \leq (2x - 1)^2] \Rightarrow [16 + 9x^2 - 24x \leq 4x^2 + 1 - 4x] \\ &\Rightarrow [5(x^2 - 4x + 3) \leq 0] \Rightarrow [5(x - 3)(x - 1) \leq 0] \end{aligned}$$

$$\text{(الف)} \quad [x - 3 \leq 0 \text{ و } x - 1 \geq 0] \Rightarrow [x \leq 3 \text{ و } x \geq 1]$$

$$\Rightarrow [\text{مجموعه جواب} = \{x: 1 \leq x \leq 3\}]$$

$$\text{(ب)} \quad [(x - 3) \geq 0 \text{ و } (x - 1) \leq 0] \Rightarrow [x \geq 3 \text{ و } x \leq 1]$$



شکل ۶.۷

در این حالت مقداری برای x موجود نیست که در هر دو نامساوی صدق کند. بنابراین مجموعه جواب نابرابری به صورت $\{x: 1 \leq x \leq 3\}$ می باشد. برای حل این نامعادله به صورت نموداری، ما ابتدا نمودارهای $y = |4 - 3x|$ و $y = |2x - 1|$ را رسم می کنیم. این نمودارها یکدیگر را در نقاطی به طول $x = 1$ و $x = 3$ قطع می کنند (شکل ۶.۷ را مشاهده کنید). بین این دو نقطه تقاطع، نمودار $y = |4 - 3x|$ در پایین نمودار $y = |2x - 1|$ قرار دارد.

بنابراین، مجموعه جواب نابرابری، برابر است با:

$$\{x: 1 \leq x \leq 3\}$$

۶.۴ نابرابریهای یک متغیره در حالت کلیتر

ما در این قسمت مثالهای مختلفی را برای مصور کردن و بیان روشهای مفید دیگری در حل نابرابریها مطرح می کنیم.

مثال ۱۲:

مجموعه جواب نامعادله $0 \leq (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ را بیابید.

فرض کنیم $f(x) \equiv (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ واضح است که، اگر $x = 1$ ، $x = 2$ یا $x = 3$ ، آنگاه $f(x) = 0$. این نقاط غالباً نقاط بحرانی نامیده می شوند. حال علامت $f(x)$ را در ناحیه های بین این نقاط، همچنین سمت چپ $x = 1$ و سمت راست $x = 3$ در نظر می گیریم.

	$(x - 1)$	$(x - 2)$	$(x - 3)$	$f(x)$
$x < 1$	-	-	-	-
$1 < x < 2$	+	-	-	+
$2 < x < 3$	+	+	-	-
$x > 3$	+	+	+	+

نتیجه می‌گیریم که برای $x \leq 1$ و $2 \leq x \leq 3$ ، $f(x) \leq 0$ مجموعه جواب عبارت است از:

$$\{x: x \leq 1\} \cup \{x: 2 \leq x \leq 3\}$$

مثال ۱۳:

مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^2 - 2}{x - 3} < 2$ را بیابید.

برای حل نابرابریهایی به صورت $f(x) \leq g(x)$ ، معمولاً بهتر است نامعادله را به شکل $f(x) - g(x) \leq 0$ تغییر داده و سپس در صورت امکان آن را به شکل $h(x) \leq 0$ حل کنیم.

$$\left[\frac{x^2 - 2}{x - 3} < 2 \right] \Rightarrow \left[\frac{x^2 - 2}{x - 3} - 2 < 0 \right]$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 2 - 2(x - 3)}{x - 3} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 3} < 0$$

مطابق آنچه در قبل ذکر شد، با فرض $x \neq 3$ ، طرفین نابرابری را در $(x - 3)^2$ که همواره مثبت است ضرب می‌کنیم (اگر $x = 3$ ، سمت چپ تعریف نشده است). در این صورت خواهیم داشت:

با توجه به نتایج حاصل از بخش ۶.۲، برای هر x همواره $x^2 - 2x + 4 \geq 0$. بنابراین، به این نتیجه می‌رسیم که باید $(x - 3) < 0$ ، که در این حالت مجموعه جواب به صورت $\{x: x < 3\}$ خواهد بود.

مثال ۱۴ :

مجموعه جواب نامعادله $\frac{x-1}{x+1} \leq x$ را بیابید:

$$\left[\frac{x-1}{x+1} \leq x \right] \Rightarrow \left[\frac{x-1}{x+1} - x \leq 0 \right]$$

بافرض $x \neq -1$ و ضرب طرفین در مقدار مثبت $(x+1)^2$ خواهیم داشت:

$$[(x+1)(x-1) - x(x+1)^2 \leq 0]$$

$$\Rightarrow [(x+1)[x-1-x(x+1)] \leq 0]$$

$$\Rightarrow [(x+1)(-1)(1+x^2) \leq 0]$$

با توجه به روابط فوق، و این که $(1+x^2)$ همواره مثبت است، نتیجه می گیریم که

$$[(x+1) > 1] \Rightarrow (x > -1)$$

مجموعه جواب به صورت زیر خواهد بود:

$$\{x : x > -1\}$$

مثال ۱۵ :

مجموعه جواب نابرابری $|2x+3| - |x+4| < 2$ را بیابید.

$$\text{اگر } 2x+3=0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$\text{بنابراین: } \begin{cases} |2x+3| = 2x+3 & x \geq -\frac{3}{2} \\ |2x+3| = -(2x+3) & x \leq -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{اگر } x+4=0 \Rightarrow x = -4$$

$$\text{بنابراین: } \begin{cases} |x+4| = x+4 & x \geq -4 \\ |x+4| = -(x+4) & x \leq -4 \end{cases}$$

حال با در نظر گرفتن هریک از نواحی فوق، حالت‌های مختلفِ نابرابری را بررسی می‌کنیم:

$$(الف) \quad x \leq -4$$

نابرابری در این حالت به شکل زیر ظاهر می‌شود:

$$\begin{aligned} &[-(2x+3) + (x+4) < 2] \\ \Rightarrow &(-x+1 < 2) \Rightarrow x > -1 \end{aligned}$$

در این حالت x ای وجود ندارد که در هر دو نابرابری $x \leq -4$ و $x > -1$ صدق کند.

$$(ب) \quad -4 \leq x \leq -\frac{3}{2}$$

در این ناحیه نابرابری به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} &[-(2x+3) - (x+4) < 2] \\ \Rightarrow &(-3x-7 < 2) \\ \Rightarrow &(3x > -9) \Rightarrow (x > -3) \end{aligned}$$

مجموعه جواب که در هر دو نابرابری $x > -3$ و $-4 \leq x \leq -\frac{3}{2}$ صدق کند عبارت

$$\{x : -3 < x \leq -\frac{3}{2}\} \quad \text{است از:}$$

$$\begin{aligned} (ج) \quad &x \geq -\frac{3}{2} \\ &[(2x+3) - (x+4) < 2] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x-1 < 2) \Rightarrow (x < 3)$$

بنابراین، در این حالت: مجموعه جوابی که در هر دو نابرابری صدق کند عبارت است از:

$$-\frac{3}{2} \leq x < 3$$

با ترکیب حالت‌های (ب) و (ج) مجموعه جواب را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\{x : -3 < x < 3\}$$

مثال ۱۶ :

ثابت کنید برای مقادیر حقیقی x ، مقدار کسر $\frac{6x+5}{3x^2+4x+2}$ نمی تواند خارج از ناحیه $-\frac{3}{2}$ تا ۳ واقع شود.

فرض کنیم: $\frac{6x+5}{3x^2+4x+2} = N$ در این صورت:

$$\begin{aligned} [6x+5 &= N(3x^2+4x+2)] \\ \Rightarrow [3Nx^2 + (4N-6)x + (2N-5) &= 0] \end{aligned}$$

(با توجه به معادله درجه دوم فوق) x می تواند برای مقادیر خاصی از N یافت شود، به قسمی که:

$$\begin{aligned} [(4N-6)^2 &\geq 4 \times 3N(2N-5)] \\ \Rightarrow [4N^2 + 9 - 12N &\geq 6N^2 - 15N] \\ \Rightarrow [2N^2 - 3N - 9 &\leq 0] \\ \Rightarrow [(2N+3)(N-3) &\leq 0] \end{aligned}$$

$$(الف) \quad [2N+3 \geq 0 \text{ و } N-3 \leq 0]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow [N \geq -\frac{3}{2} \text{ و } N &\leq 3] \\ \Rightarrow [-\frac{3}{2} \leq N &\leq 3] \end{aligned}$$

$$(ب) \quad [2N+3 \leq 0 \text{ و } N-3 \geq 0]$$

$$\Rightarrow [N \leq -\frac{3}{2} \text{ و } N \geq 3]$$

در حالت (ب) هیچ N ای که در هر دو نابرابری صدق کند، موجود نیست. بنابراین، مجموعه جواب همان $-\frac{3}{2} \leq N < 3$ می باشد.

۶.۵ نابریهای دو متغیره

در قسمتهای قبل مشاهده کردیم که مجموعه جواب یک نابری یک متغیره، مجموعه‌ای است شامل نقاطی روی خط عددهای حقیقی.

مجموعه جواب یک نابری با دو متغیر x و y به شکل $f(x,y) > 0$ ، مجموعه‌ای است شامل (x,y) هایی واقع در صفحه xOy (صفحه مختصات دکارتی)، که این صفحه را به دو ناحیه تقسیم می‌کند. در حالت کلی، یکی از این ناحیه‌ها $f(x,y) > 0$ و ناحیه دیگر $f(x,y) < 0$ می‌باشد. با پیدا کردن علامت $f(x,y)$ در یک نقطه دلخواه از صفحه، این ناحیه‌ها براحتی قابل تشخیص می‌باشند.

مثال ۱۷ :

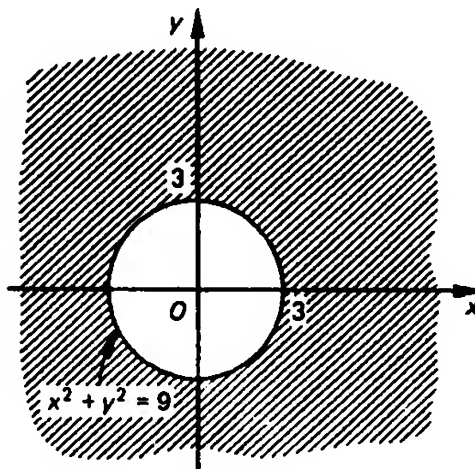
ناحیه‌ای از صفحه (xOy) را مشخص کنید که در آن $x^2 + y^2 > 9$.

ابتدا نابری را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$f(x,y) \equiv x^2 + y^2 - 9 > 0.$$

منحنی C حاصل از $x^2 + y^2 - 9 = 0$ یا $x^2 + y^2 = 9$ دایره‌ای است به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع ۳.

مبدأ مختصات $(0,0)$ در داخل دایره واقع است و $f(0,0) = -9$ و بنابراین در ناحیه جواب قرار ندارد. بنابراین ناحیه جواب مجموعه نقاط خارج دایره می‌باشد. (شکل ۶.۸ را مشاهده کنید).



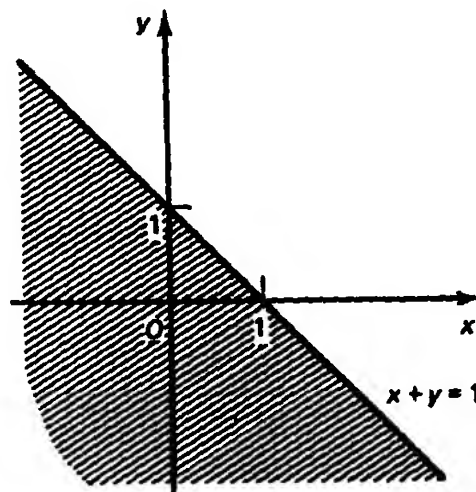
شکل ۶.۸

مثال ۱۸ :

ناحیه‌ای از صفحه xOy را مشخص کنید که در آن $x + y \leq 1$.
 ابتدا نابرابری را به صورت $f(x,y) = x + y - 1 \leq 0$ می‌نویسیم.
 نابرابری در حالت تساوی مجموعه نقاط روی منحنی $x + y = 1$ را شامل می‌شود. حالا
 بیایید در جستجوی ناحیه‌ای باشیم که $x + y < 1$ ، یعنی $f(x,y) < 0$.
 منحنی $x + y = 1$ مطمئناً یک خط راست است. این خط صفحه را به دو نیم صفحه
 تقسیم می‌کند. با قرار دادن $(0,0)$ در نابرابری، خواهیم داشت:

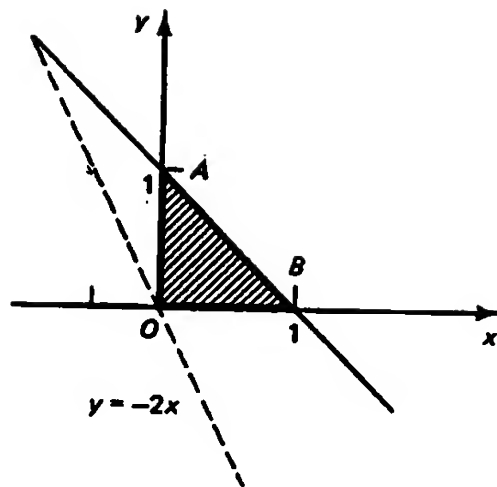
$$f(0,0) = -1 < 0$$

و بنابراین $(0,0)$ در ناحیه جواب قرار دارد. بنابراین ناحیه‌ها شورخورده که مجموعه نقاط
 روی خط را نیز شامل می‌شود، مجموعه جواب نابرابری می‌باشد. (شکل ۶.۹ را مشاهده
 کنید.)



شکل ۶.۹

اگر ما محدودیتهای $x \geq 0$ و $y \geq 0$ را نیز اضافه کنیم، ناحیه‌ای حاصل می‌شود که در
 شکل ۶.۱۰ نشان داده شده است، که تمام خطوط مرزی را نیز شامل می‌شود.
 وقتی که ناحیه جواب شامل مرزها (یا قسمتهایی از آنها) باشد، ناحیه مربوطه معمولاً
 توسط یک منحنی بسته مشخص می‌کند، مطابق آنچه در شکل ۶.۱۰ نشان داده شده است.
 در بسیاری اوقات نیاز داریم که بیشترین یا کمترین مقدار را در یک ناحیه به دست
 آوریم (این نوع مسائل در مبحث برنامه‌ریزی خطی پیش می‌آیند). برای مثال، ممکن است
 نابرابریها ۱۲۵



شکل ۶.۱۰

سؤال کنیم: بیشترین مقدار $z = 2x + y$ برای نقاط واقع در مجموعه جواب نابرابری فوق چه قدر است؟ (به ازای چه نقطه‌ای از ناحیه فوق عبارت $z = 2x + y$ بیشترین مقدار خود را کسب می‌کند.)

منحنی $2x + y = k$ ، دسته خطوطی موازی با هم را مشخص می‌کند. حال اگر خط $y = -2x$ را به موازات خودش و به طرف بالا حرکت دهیم مقدار k افزایش می‌یابد. بیشترین مقدار زمانی به دست می‌آید که خط از مبدأ مختصات دور می‌شود، یعنی: وقتی که می‌خواهد نقطه B را ترک کند مقدار z در نقطه B عبارت است از: $2(1) + 0 = 2$.

مثال ۱۹:

ناحیه‌ای از صفحه xOy را مشخص کنید که در آن $(x^2 + y^2 - 9)(y^2 - 4x) > 0$.

با توجه به نابرابری، ما فقط دو حالت می‌توانیم در نظر بگیریم:

(الف) هر دو پرانتز مثبت باشند، یا

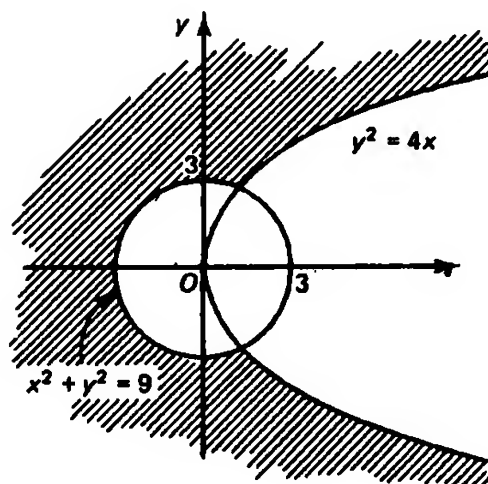
(ب) هر دو پرانتز منفی باشند.

$$(الف) \quad x^2 + y^2 - 9 > 0 \quad و \quad y^2 - 4x > 0$$

منحنی $C_1: x^2 + y^2 = 9$ دایره‌ای است به مرکز مبدأ و شعاع ۳. نقطه $(0,0)$ در

نابرابری صدق نکرده و بنابراین ناحیه جواب، عبارت است از: مجموعه نقاط واقع در خارج دایره.

منحنی $C: y^2 = 4x$ یک سهمی است. در نقطه $(1, 0)$ ، داریم $y^2 - 4x < 0$ و بنابراین این نقطه نیز نمی‌تواند در ناحیه جواب واقع باشد. پس، ناحیه جواب عبارت است از: ناحیه هاشورخورده در شکل ۶.۱۱.

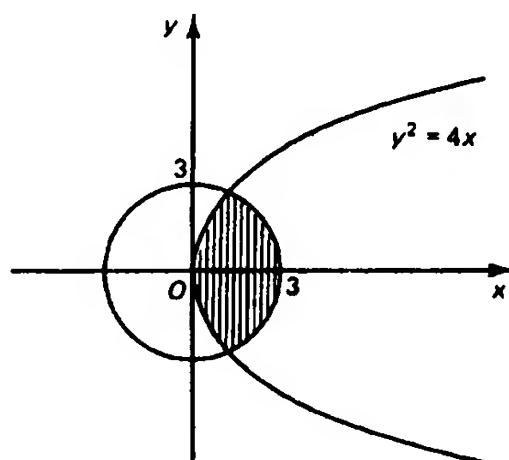


شکل ۶.۱۱

(ب) $x^2 + y^2 - 9 < 0$ و $y^2 - 4x < 0$.

ما از تجزیه و تحلیلی که در بالا انجام شد استفاده می‌کنیم. در این حالت مجموعه جواب حاصل از ناحیه جواب هر دو نابرابری، ناحیه‌ای را برای ما حاصل می‌کند که در شکل ۶.۱۲ هاشور خورده است.

تصویر کامل ناحیه جواب از منطبق کردن شکل ۶.۱۱ بر ۶.۱۲ به دست می‌آید.



شکل ۶.۱۲

تمرین ۶:

- ۱- با فرض این که $x > y$ ، نشان دهید $x - b > y - b$.
- ۲- با فرض این که $x > y$ و $a > 0$ ، نشان دهید که $ax > ay$.
- ۳- با فرض این که $a > b$ و a و b هر دو مثبت هستند، نشان دهید، برای هر عدد صحیح مثبت مانند n ، $a^n > b^n$.
- ۴- مجموعه جواب نابرابری $3x - 2 > 7$ را بیابید.
- ۵- مجموعه جواب نابرابری $\frac{2x+3}{x-1} < 1$ را بیابید.
- ۶- مجموعه جواب نابرابری $3x - 2 > x^2$ را بیابید.
- ۷- مجموعه جواب نابرابری $\frac{x-5}{2-x} > 3$ را بیابید.
- ۸- مجموعه جواب نابرابری $|x-3| < 4$ را بیابید.
- ۹- مجموعه جواب نابرابری $|3x-1| \leq |1-2x|$ را بیابید.
- ۱۰- مجموعه جواب نابرابری $(x+2)(x-2)(x+7) > 0$ را بیابید.
- ۱۱- مجموعه جواب نابرابری $\frac{x^2+56}{x} > 15$ را بیابید.
- ۱۲- نشان دهید برای مقادیر حقیقی x ، مقدار تابع $\frac{x^2+2}{2x+1}$ نمی تواند بین دو عدد ۱ و ۲ واقع شود.
- ۱۳- ناحیه ای از صفحه xOy را مشخص کنید که در آن $x \geq 0$ و $x - y \leq 1$. سپس کمترین مقدار y را بیابید.
- ۱۴- ناحیه ای از صفحه xOy را هاشور بزنید که در آن $4x < y^2$ و $x - y < \frac{5}{4}$. سپس بیشترین و کمترین مقدار y را بیابید.
- ۱۵- ناحیه ای از صفحه xOy را مشخص کنید که در آن $(x^2 + y^2 - 4)(y - x^2) < 0$.

تمرین ۱:

۱ (الف) $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

(ب) $x \in \mathbb{R}, \{y: 0 \leq y \leq 1\}$

(ج) $x \in \mathbb{R}, \{y: y \geq 2\}$

۲ زوج (ج) زوج (ب) هیچ کدام (الف)

۳ $gf: x \rightarrow (2x - 1)^2$

$fg: x \rightarrow 2x^2 - 1$

$ff: x \rightarrow 4x - 3$

$gg: x \rightarrow x^4$

۴ (الف) $f^{-1}: x \rightarrow \frac{1}{2}(5 - x), x \in \mathbb{R}$

(ب) $g^{-1}: x \rightarrow 1 + \frac{4}{x}, x \in \mathbb{R}, x \neq 0$

(ج) $h^{-1}: x \rightarrow \frac{1}{2}[\sqrt{x} - 1], x \in \mathbb{R}^+, x \neq 0$

۵ (الف) $r_1^{-1}: x \rightarrow \frac{1}{4}\sqrt{x}, D_{r_1} = \mathbb{R}^+, r_1 \text{ هم دامنه } x \geq 0$

(ب) $r_1^{-1}: x \rightarrow \frac{1}{x} - 2, D = \mathbb{R} - \{-2\}, \text{ هم دامنه } = \mathbb{R} - \{0\}$

(ج) $r_1^{-1}: x \rightarrow \sqrt{x + 4}, D = \mathbb{R}, \text{ هم دامنه } = \{x: x \geq -4\}$

۶ بُرد از ۸- تا ۴ است و f وارون پذیر

است اگر $-2 < x \leq 2$ و

$$f^{-1}: x \rightarrow \frac{2+x}{3} \text{ و } -2 < x \leq 2$$

$$\rightarrow \sqrt{x} \text{ و } 1 < x \leq 1$$

۷ (الف) $\frac{1}{27}$ (ب) $\frac{25}{4}$ (ج) $\frac{5}{2160}$ (د) ۹ (ه) $3 \times \frac{1}{30}$

۸ (الف) x^0 (ب) $y^{-\frac{1}{3}}$ (ج) x (د) $\frac{3}{x}$ (ه) $\frac{-1-2x}{(x+1)^{\frac{1}{3}}}$
(و) $\frac{x^2-3x+2}{x^2}$

۹ (الف) $3\sqrt{10}$ (ب) $2\sqrt{3}$ (ج) ۳۰ (د) $4+3\sqrt{3}$ (ه) ۰

۱۰ (الف) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (ب) $\frac{\sqrt{6}+2}{2}$ (ج) ۲

۱۱ (الف) $2 = \log_3 9$ (ب) $0 = \log_8 1$ (ج) $-4 = \log_{\frac{1}{3}} 81$ (د) $b = \log_8 2$

۱۲ (الف) -۳ (ب) -۱ (ج) $\frac{3}{2}$

۱۳ (الف) $10^1 = 10$ (ب) $3^2 = 81$ (ج) $2\sqrt[3]{2} = 3$

۱۴ (الف) $\log_8 \frac{3}{2}$ (ب) ۲

۱۶ $\frac{e^x-1}{e}$

۱۷ (الف) $X = u, Y = \text{Lnv}, Y = \text{Lna} + nX$

(ب) $X = t, Y = \frac{s}{t}, Y = u + \frac{1}{2}fX$

(ج) $X = \text{Lnx}, Y = \text{Lny}, kX + Y = \text{Lna}$

تمرین ۲:

۱ $5x^2 + 3x^2 + 3x + 10$

۲ $x^2 - 2x^2 + 11x + 4$

۳ $x^5 + x^2 + 3x^2 + 3x^2 + 3x + 1$

۴ $x^2 + 3x + 5$

۵ $(5x - 4) = \text{باقیمانده}$ و $(x + 4) = \text{خارج قسمت}$

۶ (الف) -3 (ب) $\frac{23}{8}$

۷ $a = 1, b = 2, c = 3$ و $-5 = \text{باقیمانده}$

۹ $a = 2, b = -3; (2x + 1)$

۱۱ $(x + 2)(x^2 + x + 4) = \text{عامل}$ و $(x + 2)$

۱۲ $(x - 2)$ و $(3x + 2)$ و $(x + 3)$

۱۳ (الف) $\frac{5x}{(x - 2)(x + 3)}$ (ب) $\frac{-3x^2 - x}{(x^2 + x + 2)(x + 3)}$

(ج) $\frac{-1}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x-3)}$

۱۴ (الف) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+3}$ (ب) $\frac{2x-3}{x^2+x+1} + \frac{1}{x+1}$

۱۵ $(x - 1) + \frac{\frac{7}{5}}{(x - 2)} + \frac{\frac{1}{5}}{(x + 3)}$

تمرین ۳:

- ۱ می‌نیمم در $(-\frac{1}{2}, 0)$ که بر محور x مماس است و $f(0) = 1$ (الف)
- در $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{4})$ ماکزیمم و -4 و $x = 1$ محور طولها را قطع می‌کند و $g(0) = 4$ (ب)
- در $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ می‌نیمم و محور x را قطع نمی‌کند و $h(0) = 3$ (ج)
- ۲ جوابهای حقیقی ندارد. (الف)
- (ب) $0/56$ یا $-3/56$
- ریشه مضاعف $\frac{1}{3}$ (د) ۲ یا ۳ (ج)
- ۳ (الف) $x < 0, x > 1$
- مقادیر حقیقی برای x وجود ندارد. (ب)
- (ج) $-1/62 \leq x \leq 0/62$
- برای هر مقدار حقیقی x (د)
- ۴ (الف) $x^2 - 4x + 2 = 0$
- (ب) $2x^2 - 12x + 17 = 0$
- (ج) $x^2 - 12x + 4 = 0$
- ۵ $p = \frac{1}{3}$ یا $-1, p < -1$
- ۶ $c = 2$.
- ۷ (ب) $K \leq 0, K \geq 3$ (ج) $K \geq 3$

تمرین ۴:

- ۱ $\Rightarrow (ب) \Leftarrow (الف)$
- ۲ برای کمترین مقدار $x > 1$ ، $f(x) \leq x$
- ۳ درست (ج) درست (ب) نادرست (الف)
- ۵ اگر $n = 4$ حاصل برابر است با ۲۵ که اول نیست. (الف)
- (ب) $a = -1, b = -2$
- (ج) $a = 2, b = -5$

تمرین ۵:

- ۱ (الف) $-1, 1, 3, 5$
 (ب) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$
 (ج) $-1, 4, -9, 16$
- ۲ (الف) $5, 7, 9, 11$
 (ب) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$
 (ج) $\frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{15}$
- ۳ (الف) $2 + 4 + 6 + 8$
 (ب) $1 + 3 + 9 + 27$
 (ج) $1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{5}$
- ۴ (الف) $\sum_{r=1}^6 r$ (ب) $\sum_{r=1}^6 \frac{1}{(2r+1)}$
 (ج) $\sum_{r=1}^5 (-1)^{r+1} r^2$ (د) $\sum_{r=1}^6 2x^r$

$$۵ \quad a = ۵۵, d = -۵$$

$$۶ \quad a = -۱, d = ۳$$

$$۷ \quad d = ۳ \text{ جمله دهم} = ۲۹$$

$$۸ \quad ۳۲۵$$

$$۹ \quad n^r$$

$$۱۰ \quad a = -۱, d = ۶ \text{ جمله چهارم} = ۱۷$$

$$۱۱ \quad a = \frac{1}{۴}, r = ۲ \text{ جمله } n \text{ام} = ۲^{n-۲}$$

$$۱۲ \quad ۱, -۲, ۴, -۸$$

$$۱۳ \quad a = ۸, r = -\frac{1}{۲}$$

$$۱۴ \quad ۶$$

$$۱۵ \quad -\frac{1}{۳}, \frac{1}{۸۱}$$

$$۱۶ \quad ۳۶۴$$

$$۱۷ \quad \frac{1 + (-1)^{n+1} x^n}{1 + x}$$

$$۱۸ \quad (الف) ۳ \quad (ب) \frac{1}{1+x}$$

$$۱۹ \quad r = \frac{۴}{۵}$$

$$۲۰ \quad x^4 - ۸x^۵ + ۲۴x^7 - \frac{۳۲}{x} + \frac{۱۶}{x^2}$$

$$۲۱ \quad -۹۶$$

$$۲۲ \quad \frac{1}{۲} - \frac{1}{۴۸}x + \frac{1}{۵۷۶}x^2$$

$$۲۳ \quad ۲^{n+1}$$

$$۲۶ \quad -\frac{1}{۳} < x < \frac{1}{۳}$$

$$۲۵ \quad -۱ < x < ۱$$

تمرین ۶:

$$۳ \quad \{x: x > ۳\}$$

$$۵ \quad \{x: -۳ < x < ۱\}$$

$$۶ \quad \{x: ۱ < x < ۲\}$$

$$۷ \quad \{x: ۲ < x < ۲\frac{۳}{۴}\}$$

$$۸ \quad \{x: -۱ < x < ۷\}$$

$$۹ \quad \{x: x \leq ۰\} \cup \{x: x \geq \frac{۷}{۵}\}$$

$$۱۰ \quad \{x: -۷ < x < -۲\} \cup \{x: x > ۲\}$$

$$۱۱ \quad \{x: ۰ < x < ۷\} \cup \{x: x > ۸\}$$

$$۱۳ \quad y = -۱$$

$$۱۴ \quad y = ۵ \text{ و } y = -۱$$